
Beherrschung von Unsicherheit am Beispiel eines aktiv gegen Knicken stabilisierten Systems

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D I S S E R T A T I O N

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Georg Christoph Enß
aus Bochum

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Wilfried Becker
Tag der Einreichung:	10.06.2015
Tag der mündlichen Prüfung:	04.11.2015

Darmstadt 2016
D 17

Beherrschung von Unsicherheit am Beispiel eines
aktiv gegen Knicken stabilisierten Systems

Control of uncertainty in a system
stabilised actively against buckling

Genehmigte Dissertation von Dipl.-Ing. Georg Christoph Enß aus Bochum

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Wilfried Becker

Tag der Einreichung: 10.06.2015
Tag der mündlichen Prüfung: 04.11.2015

Darmstadt 2016 – D 17

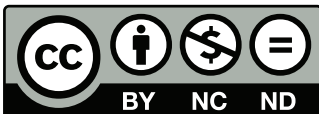
Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: [urn:nbn:de:tuda-tuprints-51765](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:tuda-tuprints-51765)

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/5176>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,
E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>
tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:
Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung
3.0 Deutschland

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

Kurzfassung

Unsicherheit tritt im Betrieb lasttragender Leichtbaustrukturen auf und kann zu unvorhergesehenem Versagen von Bauteilen führen, z. B. infolge plötzlicher Überlasten. In Leichtbaustrukturen werden häufig Lasten durch schlanke Balken unter axialer Last übertragen. Wirkt auf einen Balken eine überkritische axiale Druckbelastung, so kann ein plötzliches Stabilitätsversagen, das Knicken, auftreten. Im industriellen Einsatz werden Bauteile meist so überdimensioniert, dass Knicken nicht auftritt. In der Forschung gibt es Ansätze, Strukturen durch Zuführen von Energie mit Einsatz von Wandlerwerkstoffen und Regelalgorithmen aktiv zu stabilisieren und dadurch die Gefahr eines Versagens durch Knicken zu minimieren. Unsicherheit wird in diesen Arbeiten nicht systematisch untersucht.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist einerseits die Entwicklung einer Technologie zur aktiven Stabilisierung eines Balkens gegen Knicken, um auf Unsicherheit in der Belastung, z. B. unerwartete Überlasten, reagieren zu können und andererseits Unsicherheit zu beschreiben und zu bewerten, die infolge der aktiven Stabilisierung in das System eingebracht wird.

Der in der vorliegenden Arbeit verfolgte Ansatz der aktiven Stabilisierung gegen Knicken eines fest-gelenkig gelagerten Balkens basiert auf einer gezielten lateralen Einleitung aktiver Kräfte in der Nähe der Balkenlagerung, um ein Ausknicken zu verhindern, aber ohne die strukturdynamischen Eigenschaften des Balkens durch Anbringen von Aktuatoren zu beeinflussen. Durch die aktive Stabilisierung kann ein Ausknicken verhindert und die ertragbare Last in der experimentellen Simulation bis 40% oberhalb der kritischen Knicklast des passiven Balkens erhöht werden. Zusätzlich wird der Einfluss lateraler Störkräfte auf das aktive System untersucht.

Begleitend zur technologischen Entwicklung wird Unsicherheit im Betrieb des passiven und aktiven Balkensystems in Stichprobenversuchen untersucht und quantitativ beschrieben. Zur Bewertung von Unsicherheit wird die jeweils ertragbare Axiallast verwendet, anhand derer ein Vergleich zwischen der aktiven und passiven Lösung ermöglicht wird. Die Beherrschung von Unsicherheit erfolgt schließlich durch die Anwendung der aktiven Stabilisierungstechnologie.

In dieser Arbeit wird ein neuartiger Ansatz zur aktiven Stabilisierung eines schlanken Balkens unter axialer Last gegen Knicken vorgestellt. Neu ist ferner der methodische Ansatz, Unsicherheit passiver und aktiver Systeme anhand eines Kennwerts basierend auf Ausfallwahrscheinlichkeiten zu bewerten.

Abstract

Uncertainty occurs during operation of load-carrying light-weight structures and may lead to unforeseen failure of structural members, e. g. due to sudden excess loads. In light-weight structures, loads are often transmitted through slender beam-columns. A sudden failure due to buckling is possible if a beam-column is loaded axially above its buckling load. Nowadays, structural members are mostly oversized to ensure that buckling does not occur. However, in research there are approaches to stabilise beam-columns actively by supplying additional energy to drive actuators and control algorithms. Thereby, the risk of failure may be reduced. Uncertainty is not investigated systematically in research regarding buckling control.

It is the aim of this thesis to develop, on the one hand, active buckling control for a beam-column to respond to uncertainty in loading, e. g. sudden overloads. On the other hand, uncertainty which is introduced to the beam-column system by active buckling control is described and evaluated.

The approach used in this thesis focuses on a beam-column that is clamped on one end and pinned on the other end. Actively controlled lateral forces are applied close to the clamped end in order to stabilise the beam-column. A failure due to buckling may thus be prevented without changing the structural dynamic behaviour by adding actuators along the beam-column's surface. The load-bearing capacity may be augmented by up to 40% above the critical buckling load of the passive beam-column. Furthermore, the influence of lateral disturbance forces on the active system is investigated.

Accompanying the technical development, uncertainty in the operation of the passive and the active beam-column system is examined and quantified by means of sample trials. To evaluate uncertainty, the axial load-bearing capacity of the passive and active system are compared. Finally, control of uncertainty is achieved by applying the active buckling control.

In this thesis, a novel approach is presented to actively stabilise a slender beam-column against buckling. Furthermore, the approach to evaluate uncertainty in passive and active systems by means of a single value based on failure probabilities is new in buckling control.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Aufbau der Arbeit	4
2	Stand der Technik und Forschung	5
2.1	Stabilitätsversagen durch Knicken	5
2.2	Einflussgrößen auf Belastbarkeit und passive Maßnahmen gegen Knicken in Balken	7
2.3	Aktive Maßnahmen gegen Knicken in Balken	10
2.4	Fazit zum Stand der Technik und Forschung	15
3	Mathematische Beschreibung der aktiven Stabilisierung gegen Knicken	17
3.1	Regelungskonzept zur aktiven Stabilisierung	19
3.2	Annahmen für die aktive Stabilisierung	21
3.3	Fazit zum Konzept der aktiven Stabilisierung	22
4	Mathematische Modellbildung des aktiven Balkensystems	23
4.1	Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung des Balkensystems .	23
4.1.1	Kritische axiale Knicklast und Knickeigenformen des Balkens	25
4.1.2	Eigenkreisfrequenzen, Schwingungs- und Dehnungseigenformen des Balkens	27
4.2	Zeitkontinuierliches Zustandsraummodell	32
4.3	Fazit zur mathematischen Modellbildung	34
5	Numerische Simulation der aktiven Stabilisierung gegen Knicken	35
5.1	Stabilität des passiven Balkensystems	35
5.2	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des aktiven Balkensystems . . .	37
5.3	Reglerauslegung zur Stabilisierung gegen Knicken	40
5.4	Stabilität des aktiven Balkensystems	44
5.5	Implementierung der Regelung im Zeitbereich	45
5.6	Mechanisches Verhalten des passiven und aktiven Balkensystems . .	48
5.7	Fazit zur numerischen Simulation der aktiven Stabilisierung	59

6	Experimentelle Erprobung der aktiven Stabilisierung gegen Knicken	61
6.1	Konstruktionselemente des aktiven Balkensystems	61
6.2	Belastung des aktiven Balkensystems	63
6.3	Messwerterfassung und Regelkreis für aktive Stabilisierung	66
6.4	Anpassung des numerischen Modells an das experimentelle Balken- system	71
6.5	Ergebnisse der aktiven Stabilisierung im Zeitbereich	75
6.6	Stichprobenversuche der aktiven Stabilisierung	82
6.7	Fazit zur experimentellen Erprobung der aktiven Stabilisierung . . .	90
7	Bewertung von Unsicherheit	92
7.1	Ermittlung der Verteilungsfunktionen der modalen Auslenkung . . .	92
7.2	Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeiten bei jeder Axiallast . . .	93
7.3	Ermittlung der Weibullverteilung über alle Axiallasten	94
7.4	Ermittlung der Weibullverteilungen für Balkensystem mit Störkräften	96
7.5	Fazit zur Bewertung von Unsicherheit in der aktiven Stabilisierung	99
8	Zusammenfassung und Ausblick	101
A	Anhang	104
A.1	Kenndaten der verwendeten Sensoren und Aktuatoren	104
A.2	Kenndaten der verwendeten Mess- und Regelgeräte	105
A.3	Potentielle Energie des axial belasteten Balkens	106
	Literaturverzeichnis	107
	Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	112
	Abbildungsverzeichnis	116
	Tabellenverzeichnis	118
	Danksagung	119

1 Einleitung

Unsicherheit in der Belastung von Leichtbaustrukturen kann zu unvorhergesehenem Versagen von Bauteilen führen, z. B. durch Knicken infolge axialer Überlasten. Die vorliegende Arbeit beschreibt die Beherrschung von Unsicherheit am Beispiel einer aktiv gegen Knicken stabilisierten lasttragenden Struktur. Die im Rahmen der Arbeit entwickelte aktive Stabilisierungstechnologie ermöglicht insbesondere die Gefahr des Knickens von Balken infolge überkritischer axialer Druckbelastung zu reduzieren und Unsicherheit in der Technologie durch systematische Beschreibung, Bewertung und den Einsatz der Stabilisierungstechnologie selbst zu beherrschen.

1.1 Motivation

Dieser Abschnitt beschreibt einerseits die Motivation für den Einsatz einer aktiven Stabilisierungstechnologie gegen Knicken für axial belastete Balken, andererseits die Motivation für die systematische Beherrschung von Unsicherheit durch den Einsatz der aktiven Stabilisierung.

Technische lasttragende Strukturen erfahren während ihres Produktlebenslaufs vielfältige *Belastungen*, wie mechanische Kräfte und Momente, thermische Einwirkung etc. Bei der Auslegung einer lasttragenden Struktur wird u. a. die *Belastbarkeit* festgelegt, d. h. die Belastung, die sie ohne Versagen erträgt, z. B. die kritische Knicklast. Belastungen auf eine Struktur resultieren meist in der *Beanspruchung* des Werkstoffs, z. B. mechanische Spannungen. Die maximal ertragbare Beanspruchung eines Werkstoffs wird *Beanspruchbarkeit* genannt, z. B. die Proportionalitätsgrenze, bei deren Überschreitung sich der Werkstoff plastisch verformt, [3, S. E3].

Unsicherheit tritt in den Phasen des Produktlebenslaufs lasttragender Strukturen auf und kann zu frühzeitigem Versagen von Bauteilen führen, [15]. In der *Produktentwicklungsphase* werden Produkteigenschaften, z. B. Abmessungen und mechanische Belastbarkeit festgelegt, [3, S. F14]. Unsicherheit tritt bspw. in der Annahme der Belastung auf, die üblicherweise aus Erfahrungswerten prognostiziert wird. In der *Produktionsphase* werden Bauteile z. B. durch Umformen oder Zerspanen aus Halbzeugen gefertigt und ggf. anschließend montiert. Unsicherheit kann in der Produktionsphase in den Fertigungsprozessen sowie in den Werkstoffeigenschaften der

verwendeten Halbzeuge auftreten und wirkt sich z. B. auf Fertigungstoleranzen bei Bauteilabmessungen und die Stabilität des Fertigungsprozesses aus, [3, S.F31]. In der *Nutzungsphase* einer lasttragenden Struktur steht die Erfüllung der lasttragenden Funktion im Betrieb im Vordergrund, Unsicherheit tritt bspw. in den tatsächlich auftretenden Belastungen auf. Selten auftretende Sonderlasten werden aufgrund niedriger Auftretenswahrscheinlichkeit ggf. durch einen Sicherheitsabstand berücksichtigt, können aber trotzdem zu einem Versagen führen, [9].

Leichtbauweise bezeichnet das Bestreben, Lasten unter minimalem Bauteilgewicht über eine definierte Nutzungsdauer ohne Versagen zu tragen, [59]. Ein Ansatz der Leichtbauweise ist es, Lasten durch Balken in Tragwerken zu übertragen. Lasttragende Strukturen werden i. d. R. für eine statische oder kinetische mechanische Belastung ausgelegt, [3, S.Q103]. Ein Versagen kann z. B. durch Ermüdung infolge einer Schwingungsbeanspruchung nach einer definierten Nutzungsdauer oder aber durch Überlasten eintreten, die ein plötzliches Stabilitätsversagen der Struktur auch innerhalb der definierten Nutzungsdauer hervorrufen können, [9]. Ein Beispiel für ein Stabilitätsversagen ist das laterale Knicken axial auf Druck belasteter Balken, s. Abschnitt 2.1.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Begriff des axial belasteten Balkens (engl. *beam-column*) bzw. vereinfacht Balken verwendet, da die definitionsgemäße reine Zug- und Druckbelastung eines idealen Stabs nicht mehr zutrifft, sobald eine laterale Auslenkung auftritt.

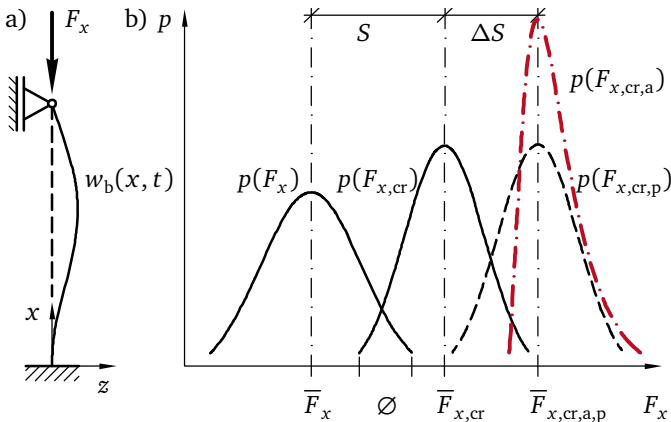


Abbildung 1.1: a) Axial belasteter Balken, ideal gerade (---), ausgelenkt in erster Knickeigenform $w_b(x, t)$ (—), b) Dichtefunktion p der Belastung F_x (—), Belastbarkeit $F_{x,cr}$ (—), Belastbarkeit passiv erhöht $F_{x,cr,p}$ (---), Belastbarkeit aktiv $F_{x,cr,a}$ (-.-.)

Abbildung 1.1a zeigt einen idealen schlanken Balken mit Druckbelastung F_x in axialer Richtung, der fest-gelenkig gelagert ist. Die Belastungsgrenze entspricht der kritischen axialen Knicklast $F_{x,cr}$ des Balkens, Gl. (2.1), bei der Knickversagen i. d. R. in der dargestellten ersten Knickeigenform auftritt. Bei axialer Überlast kann der Balken mit $w_b(x, t)$ ausknicken. Abbildung 1.1b zeigt schematisch normalverteilte Dichtefunktionen $p(F_x)$ der Belastung F_x mit Erwartungswert \bar{F}_x und der Belastbarkeit $F_{x,cr}$ mit Erwartungswert $\bar{F}_{x,cr}$ aufgrund von Unsicherheit z. B. in den Material- und Geometrieigenschaften sowie den Betriebslasten. Zwischen \bar{F}_x und $\bar{F}_{x,cr}$ liegt der Sicherheitsabstand S . Der Bereich in dem sich die Dichtefunktionen überschneiden kennzeichnet ein mögliches Versagen.

Im industriellen Einsatz werden axial belastete Balken meist passiv z. B. durch Erhöhung der Balkendicke überdimensioniert, so dass Knicken nicht mehr auftritt, [59]. Das entspricht in Abbildung 1.1b einer passiven Erhöhung des Erwartungswerts $\bar{F}_{x,cr,p}$ um den zusätzlichen Sicherheitsabstand ΔS . In der Forschung gibt es Ansätze, passive Strukturen durch den Einsatz von Sensoren, Aktuatoren, einer geeigneten Regelung und zusätzlich eingebrachter Energie in ein *aktives System* zu überführen und bei gleichbleibender Balkengeometrie zu stabilisieren, [58]. Im Fall eines Überlastereignisses kann die ertragbare Axiallast $F_{x,cr,a}$ aktiv erhöht und die Gefahr eines Versagens durch Knicken reduziert werden. Der Sicherheitsabstand wird aktiv erhöht und das Ausfallverhalten kann sich ändern, zu erkennen an dem schmaleren roten Kurvenverlauf in Abbildung 1.1b mit höherer Flankensteilheit im Vergleich zu den schwarzen Kurvenverläufen des passiven Systems. Mit einem aktiven System ist es möglich, ein Versagen gezielt zu verhindern, dadurch ergibt sich ggf. eine nicht-normalverteilte Dichtefunktion.

Passive Systeme können nicht auf Unsicherheit z. B. bei unvorhergesehenen Lasten und Störkräften reagieren. Aktive Systeme können diese Unsicherheit beherrschen, bergen jedoch auch Unsicherheit durch den Einsatz von Sensoren, Aktuatoren und einer Regelung, d. h. in der Stabilisierungstechnologie selbst. Unsicherheit wird in den gefundenen Arbeiten zur aktiven Stabilisierung gegen Knicken nicht systematisch untersucht, s. Kapitel 2.

Die wissenschaftlichen Ziele der vorliegenden Arbeit sind:

1. Entwicklung und Umsetzung eines Konzepts zur **aktiven Stabilisierung** einer knickgefährdeten Struktur mittels lateraler Kräfte nahe der Lagerung. Dadurch müssen auf der Balkenoberfläche keine zusätzlichen Aktuatoren appliziert werden und Vergleichbarkeit mit passiven Strukturen ist gewährleistet. Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf der Stabilisierung knickgefährdeter Balkenstrukturen, da diese besonders sensitiv auf Störungen bzw. Unsicherheit in den Betriebslasten reagieren.

-
2. Systematische **Beherrschung von Unsicherheit** infolge von Imperfektionen der passiven Balkenstruktur und Störkräften im Betrieb des aktiv stabilisierten Systems durch Anwendung der Stabilisierungstechnologie und Bewertung der Unsicherheit in der Stabilisierungstechnologie selbst.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Motivation und Ziele der Arbeit sind Inhalt von **Kapitel 1**. **Kapitel 2** stellt den Stand der Technik und Stand der Forschung zur Stabilisierung gegen Knicken in axial belasteten Balken dar.

Kapitel 3 stellt das in der vorliegenden Arbeit betrachtete aktive Balkensystem und das Konzept zur aktiven Stabilisierung gegen Knicken vor.

Kapitel 4 zeigt numerische Berechnungen zur aktiven Stabilisierung gegen Knicken mit einem numerischen Zustandsraummodell des aktiven Balkensystems, ausgehend von der Annahme eines axial belasteten EULER-BERNOULLI-Balkens.

In **Kapitel 5** werden anhand des numerischen Modells Regler ausgelegt und numerische Parameterstudien am Balkensystem unter Unsicherheit durchgeführt. Untersucht wird insbesondere der Einfluss der axialen Last und möglicher seitlicher Störkräfte auf die Stabilität des Balkensystems.

Kapitel 6 zeigt die experimentelle Validierung der Stabilisierungstechnologie. Zunächst werden die konstruktive Ausführung und Komponenten des realen Balkensystems dargestellt. Bei der experimentellen Erprobung kommt einerseits die Beherrschung der Unsicherheit durch die aktive Stabilisierungstechnologie zum Tragen. Andererseits wird auch die Unsicherheit sichtbar, die durch Verwendung der Stabilisierungstechnologie hinzukommt. Insbesondere wird der Einfluss der Axiallast, sowie die Einflüsse von lateraler Vorauslenkung des Balkens und der lateralen Störkräfte auf die Systemeigenschaften und Stabilität des aktiv stabilisierten Balkensystems diskutiert.

In **Kapitel 7** kann mit Hilfe der Ergebnisse aus dem vorangegangenen Kapitel nun die Unsicherheit im experimentellen aktiven Balkensystem bewertet und mit dem passiven System verglichen werden. Für eine Bewertung dient die ertragbare Axiallast als Bewertungsmaß des passiven und aktiven Systems. Mit Methoden aus der Zuverlässigkeitstechnik werden die umfangreichen experimentellen Daten auf einen Kennwert reduziert, der auf Ausfallwahrscheinlichkeiten beruht.

Kapitel 8 fasst die vorliegende Arbeit zusammen und skizziert einen Ausblick auf künftige Forschungsfragen.

2 Stand der Technik und Forschung

Ziel der Produktentwicklung ist es, die Dimensionen einer mechanischen Struktur so festzulegen, dass sie bei gegebenen Werkstoffkennwerten der geforderten Belastung über die gesamte Betriebsdauer standhält, [27]. Ein Versagen kann auftreten, wenn die Belastung die Belastbarkeit überschreitet, wenn z. B. $F_x > F_{x,cr}$, Abbildung 1.1. Sonder- und Missbrauchseignisse können u. a. ein *Stabilitätsversagen* nach sich ziehen [27], [59]. Dieses umfasst z. B. Knicken druckbelasteter Balken oder Beulen von Platten und Schalen, plastische Verformung infolge Überschreitung der Dehngrenze des Werkstoffs etc., [3, S. E3]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Stabilisierung gegen elastisches Knicken einer schlanken Balkenstruktur betrachtet.

Der Stand der Technik umfasst das Knicken schlanker Balken unter Axiallast in Abschnitt 2.1 und passive Maßnahmen gegen Knicken in Abschnitt 2.2. Der Stand der Forschung stellt Ansätze vor, wie passive Balkenstrukturen durch Hinzufügen von Sensoren, Aktuatoren und einer Regelung unter Zuführung von Energie aktiv gegen Knicken stabilisiert werden können, Abschnitt 2.3.

2.1 Stabilitätsversagen durch Knicken

Ein Stabilitätsversagen kann vor allem bei axial druckbelasteten mechanischen Strukturen auftreten und zu einem plötzlichen seitlichen Ausweichen der Struktur führen. Die ersten Arbeiten zum Versagen druckbelasteter Balken durch Knicken und der sich einstellenden Knickauslenkung wurden von EULER im Jahre 1744 publiziert, [23]. Die Druckbelastung eines schlanken Balkens oberhalb seiner kritischen axialen Knicklast $F_{x,cr}$ kann Knicken hervorrufen, [51].

Umfangreiche numerische und experimentelle Arbeiten zum Knicken von Balken, Zylindern und Platten unter Unsicherheit wurden u. a. von KOITER [38] durchgeführt und insbesondere der Einfluss der Vorauslenkung auf die ertragbare Last untersucht. ELISHAKOFF [14] gibt eine Übersicht zur Geschichte der Unsicherheit in der numerischen Simulation des Knickens und stellt deterministische und stochastische Berechnungsmethoden vor. Da druckbelastete Balken sehr sensitiv auf Änderungen in der Belastung oder Imperfektionen reagieren können, sind statistische Methoden zur Beschreibung des Knickverhaltens geeignet, wie sie z. B. BOLOTIN [8] vorstellt.

Im Folgenden wird der Begriff des axial belasteten Balkens bzw. vereinfacht Balken verwendet, da die definitionsgemäße reine Zug- und Druckbelastung eines idealen Stabs nicht mehr zutrifft, sobald eine laterale Auslenkung auftritt.

Imperfektionen haben in realen druckbelasteten Bauteilen einen hohen Einfluss auf die ertragbaren Lasten, daher kann für axial druckbelastete Strukturen die Bezeichnung „*imperfection sensitive structures*“ verwendet werden, [38]. Für diese Strukturen können kleine Änderungen der Belastung oder Imperfektionen große Änderungen der Verformung bzw. Auslenkung $w_b(x)$ verursachen, [51], Abbildung 2.1a und 2.1b.

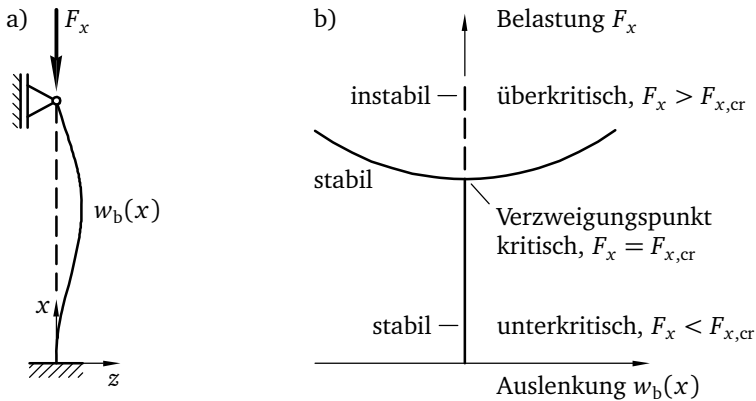


Abbildung 2.1: a) Axial belasteter Balken, ideal gerade (---), ausgelenkt in erster Knickeigenform $w_b(x)$ in z -Richtung (—), b) Kraft-Auslenkungs-Diagramm bzw. Verzweigungsdiagramm mit stabilen Gleichgewichtslagen (—) und instabiler Gleichgewichtslage (---)

Die statische Auslenkung $w_b(x)$ des dargestellten Balkens ist sensitiv gegenüber Änderungen in der Belastung, insbesondere nahe der axialen kritischen Knicklast F_x , Abbildung 2.1b. Eine weitere Unsicherheit ist die Mehrdeutigkeit der Auslenkung bei Stabilitätsproblemen. Während z. B. bei zugbelasteten Balken nur eine stabile Gleichgewichtslage existiert und im elastischen Bereich nach dem HOOKE'schen Gesetz ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung besteht, existieren für druckbelastete Balken mehrere Gleichgewichtslagen ab dem sog. Verzweigungspunkt bei der kritischen Knicklast, [26], Abbildung 2.1b. Eine Belastung unterhalb der kritischen Knicklast $F_x < F_{x,cr}$ wird als unterkritisch, eine Belastung mit $F_x = F_{x,cr}$ als kritisch und eine Belastung oberhalb $F_x > F_{x,cr}$ als überkritisch bezeichnet, Abbildung 2.1b, [51]. Im Folgenden werden kritische Größen mit dem Index $_{cr}$ gekennzeichnet.

2.2 Einflussgrößen auf Belastbarkeit und passive Maßnahmen gegen Knicken in Balken

Um die Gefahr eines Versagens durch Knicken unter Wirkung von Betriebslasten zu minimieren, wird in der industriellen Praxis meist die Knicklast $F_{x,cr}$ mit einem Sicherheitsabstand S so dimensioniert, dass ein Versagen durch Knicken verhindert wird, [59]. Ein zusätzlicher Sicherheitsabstand ΔS kann durch Erhöhung der kritischen Knicklast z. B. durch Änderung von Werkstoff oder Geometrie erzielt werden, Abbildung 1.1.

Abbildung 2.2 zeigt einen ideal geraden Balken mit Rechteckquerschnitt der Länge l , Breite b und Dicke h mit Elastizitätsmodul E und Flächenträgheitsmoment I_y um die y -Achse. Der Balken knickt vorzugsweise in z -Richtung bei kleinstem Flächenträgheitsmoment I_y . Dadurch kann das Knicken von einem räumlichen auf ein ebenes Problem in der x - z -Ebene reduziert werden. Alle nachfolgenden Abbildungen von Balken in der vorliegenden Arbeit stellen Balken mit Rechteckquerschnitt dar, falls nicht anders beschrieben. Die Indizes x, y, z stehen für x -, y - bzw. z -Richtung.

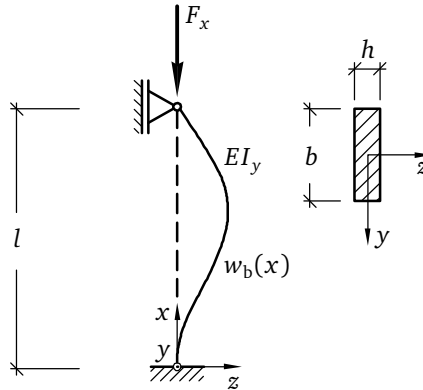


Abbildung 2.2: Balken der Länge l , ideal gerade (— —), ausgelenkt in erster Knickeigenform $w_b(x)$ (—) mit fester Einspannung bei $x = 0$, gelenkiger Lagerung bei $x = l$ und Knickfaktor $c \approx 0,7$

Für den Balken in Abbildung 2.2 lässt sich die versagensrelevante kritische Knicklast berechnen,

$$F_{x,cr} = \pi^2 \frac{EI_y}{(c \cdot l)^2} = \pi^2 \frac{EI_y}{l_{eff}^2}, \quad (2.1)$$

mit I_y aus Gleichung (2.3) und dem Knickfaktor c , [51].

Die vier EULER'schen Knickfälle definieren vier Standard-Lagerungsbedingungen 1) fest eingespannt – frei, 2) beidseitig gelenkig gelagert, 3) fest eingespannt – gelenkig gelagert und 4) beidseitig fest eingespannt sowie die zugehörigen Knickfaktoren c mit Werten zwischen 0,5 und 2, die sich aus der Lösung der Knickgleichung des Balkens mit den vorgenannten Randbedingungen ergeben, [26]. Das Produkt aus Knickfaktor und geometrischer Balkenlänge wird auch als effektive Knicklänge $l_{\text{eff}} = c \cdot l$ bezeichnet. Der dimensionslose Schlankheitsgrad s für Balken mit Querschnittsfläche A fasst Geometrieparameter und Lagerungsbedingungen zusammen und gewährleistet die Vergleichbarkeit unterschiedlicher Balken,

$$s = c \cdot l \sqrt{\frac{A}{I_y}}, \quad (2.2)$$

[59]. Der dimensionslose Grenzschlankheitsgrad s_{grenz} kennzeichnet den Übergang zwischen elastischem Knicken eines schlanken Balkens für $s > s_{\text{grenz}}$ und plastischem Fließen des Werkstoffs eines gedrungenen Balkens für $s < s_{\text{grenz}}$ bei axialer Druckbelastung. Für typische Konstruktionswerkstoffe liegt der Grenzschlankheitsgrad z. B. für Aluminium bei $s_{\text{grenz,Alu}} \approx 60$ und für Stahl bei $s_{\text{grenz,Stahl}} \approx 100$, [59].

Im Folgenden werden werkstofftechnische und geometrische **Einflussgrößen** auf die kritische Knicklast vorgestellt und daraus Maßnahmen abgeleitet, um die Gefahr des elastischen Knickens passiver Balken zu reduzieren. Beispielhaft ist der Effekt der Skalierung der drei Einflussgrößen E , l_{eff} und h in Abbildung 2.3 normiert dargestellt, die in den folgenden Absätzen erläutert werden.

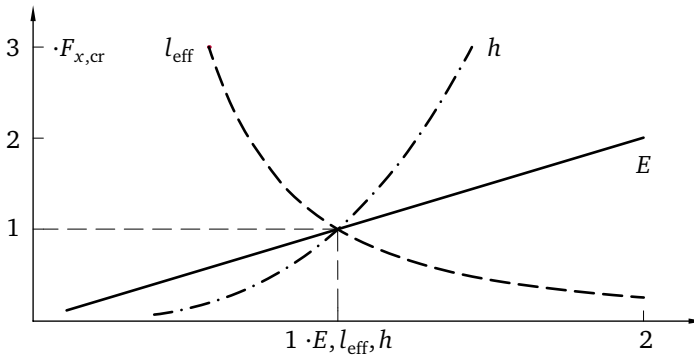


Abbildung 2.3: Skalierungsdiagramm der normierten Knicklast $F_{x,\text{cr}}$ zu den normierten Designparametern Elastizitätsmodul E (—), effektive Knicklänge l_{eff} (---) und Balkendicke h (-·-), vgl. [19], [21]

Elastizitätsmodul

Durch Werkstoffauswahl kann der Elastizitätsmodul E erhöht werden, der linear in Gleichung (2.1) zur Berechnung der Knicklast $F_{x,cr}$ eingeht. Bspw. hat Stahl etwa den dreifachen Elastizitätsmodul im Vergleich zu Aluminium bei dreifacher Dichte, wodurch sich kein Gewichtsvorteil bei gleicher ertragbarer Knicklast ergibt, jedoch eine schlankere Bauweise mit Stahl möglich ist, [51].

Flächenträgheitsmoment

Die Geometrieeigenschaft Flächenträgheitsmoment I_y geht ebenfalls linear in die Knickgleichung ein, für einen rechteckigen Balken hängt dieses jedoch in der dritten Potenz von der Balkendicke h ab, Abbildung 2.3,

$$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad (2.3)$$

[26]. Es ist ebenfalls möglich das Flächenträgheitsmoment $I_y(x)$ variabel über die Balkenlänge zu wählen. Eine Aufdickung eines Balkens und folglich Erhöhung des Flächenträgheitsmoments an der Stelle der größten Biegemomente führt zu einer Erhöhung der kritischen Knicklast, [51].

Eine weitere Möglichkeit der Beeinflussung des Flächenträgheitsmoments I_y besteht in der Anpassung des Balkenprofils, [59]. Bei Vollprofil-Balken gleicher Querschnittsfläche und Masse kann ein Balken mit Rundquerschnitt eine höhere Drucklast ertragen als ein Balken mit Rechteckquerschnitt. Sein kleinstes Flächenträgheitsmoment ist dann in allen Richtungen gleich groß und der Balken kann in beliebigen Richtungen ausknicken. Hohlprofil-Balken können darüber hinaus bei gleichbleibender Masse deutlich höhere Knicklasten ertragen, da tragende Flächenelemente weiter vom Schwerpunkt der Querschnittsfläche angeordnet werden können. Der Abstand eines Flächenelements vom Schwerpunkt geht nach dem Satz von STEINER quadratisch in das Flächenträgheitsmoment ein, [26]. Dadurch ist eine Steigerung des Flächenträgheitsmoments und folglich eine Erhöhung der Knicklast möglich.

Effektive Balkenlänge

Die Geometrieeigenschaft effektive Balkenlänge l_{eff} geht nach Gleichung (2.1) quadratisch in den Nenner der Knicklast ein, Abbildung 2.3, [26]. Aus einer Verkürzung des Balkens auf die halbe Länge resultiert die vierfache kritische Knicklast.

Die **Knickfaktoren** c beeinflussen die effektive Knicklänge und können für Balken mit unterschiedlichen Lagersteifigkeiten berechnet werden.

In Leichtbau-Konstruktionen findet man neben freistehenden axial belasteten Balken häufig Balken, die an andere Strukturen angebunden sind. Dadurch erfährt der Balken eine seitliche **elastische Stützwirkung** bzw. Bettung. Diese wird meist durch diskrete Federelemente modelliert, [59]. Durch die rückstellenden Kräfte der Federelemente erhöht sich die kritische Knicklast.

Störgrößen

Während Werkstoffauswahl, Geometrieeigenschaften und Lagerungsbedingungen in der Produktentwicklung als Designparameter festgelegt werden, können auch Störgrößen im Betrieb der Struktur auftreten, die einen Einfluss auf die ertragbare axiale kritische Knicklast haben. **Seitliche Störkräfte** können die ertragbare Last eines axial druckbelasteten Balkens herabsetzen.

Vorauslenkungen sind in realen technischen Strukturen vorhanden und wirken sich auf die Momentenverteilung axial druckbelasteter Balken aus. Bereits eine kleine Vorauslenkung eines Balkens, hervorgerufen z. B. durch Herstellung und Montage ruft ein auslenkendes Moment hervor, so dass die kritische Knicklast abnimmt, [51]. Ein **exzentrischer Lastangriff** hat den selben Effekt, dass die zunehmende Axiallast F_x mit einem Hebelarm angreift, infolgedessen das auslenkende Biegemoment ansteigt und die kritische Knicklast abnimmt, [51]. Streng genommen kann im Fall dieser Störungen nicht mehr von einem Stabilitätsproblem gesprochen werden, da sich bereits bei unterkritischer Belastung eine endliche Auslenkung einstellt und die Verzweigung verschwindet, [59]. Damit sind die Begriffe des Knickens und kritische Knicklast ebenfalls nicht mehr zutreffend und werden durch Druckbiegung und ertragbare Last ersetzt.

2.3 Aktive Maßnahmen gegen Knicken in Balken

Aus dem Stand der Forschung gehen aktive Maßnahmen zur Vermeidung eines Knickversagens hervor, bei denen in einen passiven Balken durch Zuführung von elektrischer Energie sowie Einsatz von Aktuatoren, Sensoren und einer Regelung zusätzliche stabilisierende Kräfte oder Momente eingeleitet werden, [58]. Tabelle 2.1 stellt aktive Systeme im Kontext zu passiven und semi-aktiven Systemen dar. Dabei wird unterschieden, ob und in welchem Maß dem System elektrische Energie zugeführt wird.

Passive Systeme benötigen keine extern zugeführte Energie, z. B. ein mechanischer Tilger, oder beziehen diese aus der schwingenden Struktur selbst wie im Falle des Shunt-Damping, [25]. Semi-aktive Systeme hingegen benötigen externe Hilfsenergie z. B. für die Anpassung in einem adaptiven Tilger. In diesem Fall werden

Tabelle 2.1: Vergleich passiver, semi-aktiver und aktiver Systeme, vgl. [54]

System	passiv	semi-aktiv	aktiv
el. Energie	keine	Hilfsenergie benötigt	Stellenergie benötigt
Bauteile	mechanische Struktur, ggf. passive elektr. Bauteile	Sensoren, Aktuatoren, elektrische Schaltung, Regelung	Sensoren, Aktuatoren, elektrische Schaltung, Regelung
Beispiel	mech. Tilger, Shunt-Damping	Schwingungskontrolle mit adaptivem Tilger	Stabilisierung gegen Knicken

zusätzlich zur mechanischen Struktur Sensoren, Aktuatoren, eine elektrische Schaltung und ggf. eine Regelung benötigt, [54].

Aktive Systeme

Aktive Systeme können nach VDI 2064 durch Einsatz von Sensoren, Aktuatoren, einer Regelung und zusätzlicher externer Stellenergie gezielt Kräfte und Momente bzw. Verschiebungen und Dehnungen in ein System einleiten, um verschiedene strukturmekanische Zielfunktionen zu erfüllen, [54], [47]. Zudem kann eine adaptive Regelung zum Einsatz kommen, die sich an veränderliche Randbedingungen anpassen kann, [32]. Das Anwendungsspektrum aktiver Maßnahmen umfasst die Schwingungskontrolle, Formkontrolle, Stabilitätskontrolle etc.

Die meisten Arbeiten zu aktiv geregelten Struktursystemen (*engl. active structural control, active vibration control*) beschäftigen sich mit der Schwingungskontrolle bzw. -minderung, [32]. Schwingungskontrolle ist eng verknüpft mit der aktiven Stabilisierung in der Hinsicht, dass ein Regler zur Schwingungsminderung auch eine Reduktion der Auslenkungsamplitude der Struktur zum Ziel hat, [4].

Dem gegenüber hat die aktive Formkontrolle (*engl. shape control*) das Ziel, eine kontrollierte statische Verformung flexibler Strukturen z. B. durch multifunktionale Werkstoffe zu erreichen, [2]. Aufbauend auf Arbeiten von LESIEUTRE [39] entwickelten u. a. VOS UND BARRETT [56] „Post-buckled precompressed elements“ (PBP). Infolge axialer Druckbelastung nimmt bei PBP die Struktursteifigkeit ab, wodurch u. a. der elektromechanische Kopplungsfaktor von piezoelektrischen Flächenwandlern signifikant ansteigt und damit eine Wegvergrößerung für die kleinen Dehnungen piezokeramischer Flächenwandler möglich ist, [56]. Diesen Effekt nutzen später im Text vorgestellte Arbeiten zur Stabilitätskontrolle mittels piezokeramischer Flächenwandler.

Beispiele für multifunktionale Werkstoffe sind piezoelektrische Werkstoffe, Formgedächtnislegierungen (FGL) etc. Piezoelektrische Aktuatoren basieren auf

dem inversen piezoelektrischen Effekt, bei dem elektrische in mechanische Energie gewandelt wird, [29]. Formgedächtnislegierungen können aufgrund von Gefügeänderungen ihre Gestalt in Abhängigkeit von der Temperatur ändern, [29].

Stabilitätskontrolle

Ziel der aktiven Stabilitätskontrolle ist die Vermeidung eines Stabilitätsversagens z. B. durch Knicken von Balken. Die Arbeiten zur aktiven Stabilisierung schlanker Balken gegen Knicken (*engl. buckling control*) können in zwei Gruppen eingeteilt werden. Einerseits können mittels multifunktionaler Werkstoffe stabilisierende Gegenmomente induziert werden, andererseits können Kräfte in axialer oder lateraler Richtung stabilisierend auf den Balken einwirken, Tabelle 2.2.

Tabelle 2.2: Gegenüberstellung Stabilisierungstechnologien

Technologie	stabilisierende Momente			stabilis. Kräfte	
Aktuatorprinzip	ein Piezo-Paar auf Balken	mehrere Piezo-Paare auf Balken	FGL-Aktuatoren in Balken	Elektromagnet	Inertialmassen-aktuator
Schlankheitsgrad s	970 – 230	2310 – 370	300 – 170	3200	–
$F_{x,e}/F_{x,cr,num}$ ($F_{x,e}/F_{x,cr,exp}$)	4 – 1 (1,37)	8,8 – 1,05 (4) – (2,9)	– (1,13) – (1,11)	– (1,18)	– –
Literatur	[42], [43], [50], [53], [60]	[4], [6], [10], [12], [24], [57], [61]	[11], [28]	[34]	[4]

Zum Vergleich verschiedener aktiv geregelten Maßnahmen wird in Tabelle 2.2 die in den zitierten Arbeiten genannte numerisch oder experimentell ertragbare Last $F_{x,e}$ durch die jeweilige numerisch ertragbare Knicklast $F_{x,cr,num}$ bzw. experimentell ertragbare Last des passiven unregelten Systems $F_{x,cr,exp}$ dividiert,

$$f_{num} = \frac{F_{x,e}}{F_{x,cr,num}} \quad \text{bzw.} \quad f_{exp} = \frac{F_{x,e}}{F_{x,cr,exp}}. \quad (2.4)$$

Der Faktor f_{num} beschreibt die Erhöhung der numerisch ertragbaren Last, der Faktor f_{exp} die Erhöhung der experimentell ertragbaren Last.

Stabilisierende Momente: Im Folgenden werden die Arbeiten unter „stabilisierende Momente“ in Tabelle 2.2 näher beschrieben, in denen mit Piezo-Flächenwandlern und FGL-Aktuatoren stabilisierende Momente zur Erhöhung

der ertragbaren Last in kritisch belastete Balken eingeleitet werden. Die Piezo-Flächenwandler sind stets als Aktuatorpaare kolloziert auf die Ober- und Unterseite flacher Balken mit Rechteckquerschnitt appliziert. Die FGL-Aktuatoren sind in flache Balken aus Verbundwerkstoff integriert. Die im Folgenden berechneten Schlankheitsgrade sind auf den passiven Balken ohne applizierte Aktuatoren bezogen, sofern nicht explizit anders angegeben, da insbesondere in den numerischen Arbeiten keine Angaben zu den Abmessungen der Aktuatoren gemacht wurden.

Ein Piezo-Aktuatorpaar auf Balken appliziert

Für „Ein Piezo-Paar auf Balken“ in Tabelle 2.2 führten MERESSI UND PADEN [42] eine numerische Simulation zur Stabilisierung eines beidseitig gelenkig gelagerten idealen Balkens mit Schlankheitsgrad $s = 490$ und Aktuatoren über die gesamte Balkenlänge durch. Sie stabilisieren mit einem Linear-Quadratischen Regler (LQR) numerisch die erste Knickeigenform, so dass die Struktur erst in der um den Faktor $f_{\text{num}} = 4$ größeren zweiten Knicklast ausknickt. Numerisch zeigt die Auslegung der Reglerparameter für die höchste anzunehmende Last auch für alle geringeren Axiallasten stabilisierende Wirkung. Unsicherheit wird nicht thematisiert.

YUAN [60] führte eine numerische dimensionslose Studie zur Stabilität eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens mit einem mittig applizierten Aktuatorpaar mit $1/4$ der Balkenlänge durch. Die ertragbare Last kann mit einem P-Regler um den Faktor $f_{\text{num}} = 4$ gesteigert werden. Unsicherheit wird als exzentrischer Lastangriff der Axiallast berücksichtigt, der die ertragbare Last reduziert.

MUKHERJEE UND SAHA CHAUDHURI [43] erzielten numerisch an einem ebenfalls beidseitig gelenkig gelagerten Balken mit Aktuatoren über der gesamten Balkenlänge und Schlankheitsgrad $s = 230$ mit einem P-Regler eine Erhöhung der ertragbaren Last um den Faktor $f_{\text{num}} = 1,9$. Unsicherheit wird in dieser Arbeit in Form einer Vorauslenkung berücksichtigt, die eine Verringerung der ertragbaren Last bewirkt.

VARELIS AND SARAVANOS [53] stabilisierten numerisch einen beidseitig fest eingespannten Balken mit $s = 350$ und Aktuatoren über die gesamte Balkenlänge. Dieser wird durch die Unsicherheit einer lateralen Linienlast gestört und kann trotz Störung mittels eines P-Reglers die theoretische Knicklast des ungestörten Systems ertragen, d. h. Faktor $f_{\text{num}} = 1$.

THOMPSON UND LOUGHLAN [50] untersuchten experimentell einen beidseitig gelenkig gelagerten Balken aus Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV) mit $s = 970$ und zwei gegenüberliegend an der Balkenmitte aufgeklebten Aktuatoren. Der mit einem P-Regler aktiv geregelte Balken erträgt experimentell im Vergleich zu der experimentell ermittelten passiv ertragbaren Last eine um den Faktor $f_{\text{exp}} = 1,37$ höhere Axiallast. Unsicherheit wird nicht thematisiert.

Mehrere Piezo-Aktuatorpaare auf Balken appliziert

Für „Mehrere Piezo-Paare auf Balken“ in Tabelle 2.2 zeigt WANG [57] numerisch die Stabilisierung eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens mit Schlankheitsgrad $s = 530$ und zwei Aktuatorpaaren, die bei $1/3$ und $2/3$ der Balkenlänge angeordnet sind und jeweils $1/6$ der Balkenlänge einnehmen. Damit gelingt es dem Autor, die erste und zweite Knickeigenform zu stabilisieren und numerisch mit einem LQR-Regler die ertragbare Last um einen Faktor $f_{\text{num}} = 8,8$ zu steigern. Unsicherheit wird in dieser Arbeit nicht thematisiert.

ZENZ UND HUMER [61] erzielen numerisch mit 12 Aktuatorpaaren auf der gesamten Balkenlänge für ein System mit Schlankheitsgrad $s = 2310$ mit einer P-Regelung eine Steigerung der ertragbaren Last um den Faktor $f_{\text{num}} = 8$ für die Regelung der ersten und zweiten Knickeigenform. Unsicherheit wird nicht berücksichtigt.

FRANCO CORREIA ET. AL. [24] führt eine numerische Studie zur optimalen Positionierung acht quadratisch zugeschnittener Flächenwandler-Paare zur Stabilisierung eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens mit $s = 370$ durch. Für eine Anordnung der Aktuatoren entlang der Balkenachse und einer Ausdehnung von ca. 60% der Balkenlänge wird durch Anlegen einer konstanten elektrischen Spannung die ertragbare Axiallast um den Faktor $f_{\text{num}} = 1,05$ erhöht. Unsicherheit wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

BERLIN ET. AL. [6] sowie CHASE UND YIM [10] untersuchen experimentell einen beidseitig gelenkig gelagerten schlanken Balken mit $s = 660$ aus Glasfaserverstärktem Kunststoff mit 16 paarweise angeordneten Piezo-Flächenwandlern und 18 MEMS-Sensoren (*Micro-Electro-Mechanical System*), der mit einem LQR-Regler stabilisiert wird. Sie erreichen experimentell eine Erhöhung der ertragbaren Axiallast um den Faktor $f_{\text{exp}} = 2,9$. Unsicherheit wird nicht thematisiert.

In seiner Dissertation untersucht BERLIN [4] experimentell einen beidseitig gelenkig gelagerten Balken mit $s = 4100$ aus Federstahl, auf den paarweise zehn Piezo-Flächenwandler und kollierte Dehnungsmessstreifen (DMS) über die gesamte Balkenlänge angebracht sind. Der Schlankheitsgrad verringert sich durch Aufbringung der Piezo-Flächenwandler allerdings von $s = 4100$ auf $s = 450$. D. h. die Eigenschaften des Balkens werden also signifikant verändert, die theoretische kritische Knicklast beträgt ca. das 10-fache der Knicklast des Balkens ohne applizierte Piezo-Aktuatoren. Mit einem PID-Regler gelingt es, die erste Knickeigenform zu stabilisieren, d. h. die experimentell ertragbare Axiallast mit Regelung um den Faktor $f_{\text{exp}} = 4$ der experimentell ertragbaren Last zu erhöhen. Unsicherheit wird in Form von Störkräften durch Antippen mit einem Finger berücksichtigt, jedoch nicht reproduzierbar eingebracht und nicht quantifiziert. Eine Erweiterung der Regelung auf modale Regler am selben Prüfstand von COHEN [12] liefert vergleichbare Ergebnisse.

FGL-Aktuatoren in Balken integriert

Für „FGL-Aktuatoren in Balken“ in Tabelle 2.2 haben CHOI ET. AL. [11] FGL-Drähte exzentrisch in einen beidseitig eingespannten schlanken FKV-Balken mit Schlankheitsgrad $s = 300$ einlaminieren. Damit wird ein vorausgelenkter Balken mit reduzierter kritischer Knicklast im Vergleich zu geraden Balken durch Aktivierung der FGL-Aktuatoren begradigt. So kann die experimentell ermittelte aktiv ertragbare Last im Vergleich zur passiv ertragbaren Last um den Faktor $f_{\text{exp}} = 1,11$ gesteigert werden. Unsicherheit wird nicht thematisiert.

HAN ET. AL. [28] verwenden zur aktiven Stabilisierung einen runden Balken aus Epoxidharz mit $s = 170$ mit eingegossener FGL-Feder. Mit diesem Aufbau wird durch Aktivierung infolge des begradigenden Effekts der FGL-Feder experimentell eine Erhöhung der ertragbaren Last um den Faktor $f_{\text{exp}} = 1,13$ erzielt. Die numerischen und experimentellen Ergebnisse weisen nach Aussage der Autoren gute Übereinstimmung auf. Unsicherheit wird nicht berücksichtigt.

Stabilisierende Kräfte: Eine der ersten Arbeiten zur aktiven Stabilisierung knickgefährdeter Strukturen ist die Dissertation von JEFFERIS [34] aus dem Jahr 1968. Er führt numerische und experimentelle Simulationen zur Stabilisierung der ersten Knickeigenform eines Balkens mittels elektromagnetisch erzeugten lateralen Rückstellkräften durch, siehe „Elektromagnet“ in Tabelle 2.2. An einem beidseitig gelenkig gelagerten flachen Balken mit Schlankheitsgrad $s = 3170$ werden zwei gegenüberliegende Elektromagnete an der Balkenmitte mittels eines LQR-Reglers angesteuert. Damit kann aktiv eine um den Faktor $f_{\text{exp}} = 1,18$ erhöhte Last ertragen werden. Unsicherheit wird nicht behandelt.

BERLIN [4] zeigt eine Konzeptstudie, in der eine äußere Abstützung der stabilisierenden Kräfte umgangen wird. Stabilisierende rückstellende Seitenkräfte werden mittels eines Inertialmassenaktors, bestehend aus einem Linearantrieb und einer seismischen Masse, in die Balkenmitte eingeleitet, siehe „Inertialmassenaktor“ in Tabelle 2.2. Dieses Konzept wurde jedoch nicht quantitativ ausgearbeitet. Unsicherheit wird nicht thematisiert.

2.4 Fazit zum Stand der Technik und Forschung

Ein Stabilitätsversagen kann bei axial druckbelasteten Balkenstrukturen auftreten und zu einem plötzlichen seitlichen Ausweichen der Struktur führen.

Passive Maßnahmen gegen Knicken in Balken nach dem Stand der Technik haben den Vorteil, dass sie mit den vorgestellten bekannten Methoden z. B. durch Änderung der Querschnittsgeometrie oder Erhöhung der Querschnittsfläche umgesetzt werden können. Jedoch ist es möglich, dass Anforderungen an Werkstoff

und Geometrie des passiven Balkens so vorgegeben sind, dass ein Knickversagen im Betrieb nicht ausgeschlossen werden kann. Ein weiterer Nachteil der passiven Maßnahmen ist die fehlende Möglichkeit, auf unerwartete Störungen oder Überlasten zu reagieren. In solchen Fällen bieten aktive Maßnahmen zur Vermeidung des Knickens den Vorteil und die Möglichkeit, unter Verwendung zusätzlicher Energie bei Bedarf die ertragbare Axiallast temporär zu erhöhen und auf Störungen reagieren zu können.

Aus dem Stand der Forschung geht hervor, dass mit Maßnahmen zur aktiven Stabilisierung knickgefährdeter Balkenstrukturen eine Erhöhung der ertragbaren Last möglich ist, [58]. In allen Arbeiten werden stets symmetrische Lagerungsbedingungen gewählt. Unsicherheit wird nicht systematisch behandelt.

Numerisch ist bei der aktiven Stabilisierung der ersten Knickeigenform eine Steigerung der ertragbaren Axiallast bis zur zweiten Knicklast und einem Faktor von $f_{\text{num}} = 4$ möglich; für eine Stabilisierung der ersten und zweiten Knickeigenform ist eine Steigerung bis zu einem Faktor von $f_{\text{num}} = 8,8$ möglich.

In Experimenten konnte dies jedoch bisher nicht nachgewiesen werden, [58]. In den experimentellen Arbeiten zu stabilisierenden Momenten mit Piezo-Aktuatoren führte ein hoher Schlankheitsgrad des Balkens und ein hoher Anteil von Aktuatorfläche am Gesamtquerschnitt des Balkensystems zu einer Steigerung der ertragbaren Last um den Faktor $f_{\text{exp}} = 4$, [4]. Arbeiten zur Stabilisierung mit mehreren Piezo-Aktuatorpaaren erzielten eine größere Steigerung der ertragbaren Last als mit einem Aktuatorpaar, [5], [10]. Die genannten experimentellen Arbeiten zur Stabilisierung mit FGL-Aktuatoren zeigen, dass durch quasistatische, rückstellende Momente eine Steigerung der ertragbaren Last bis zu einem Faktor von $f_{\text{exp}} = 1,13$ experimentell möglich ist, [11], [28].

Zur aktiven Stabilisierung mittels lateraler aktiver Kräfte wurden zwei Arbeiten gefunden, in denen rückstellende Kräfte in der Balkenmitte angreifen, [4], [34]. Die Abstützung der stabilisierenden Kräfte erfolgt jedoch in einem Fall an Hilfslagern, im anderen Fall an einer seismischen Masse.

Durch Aufbringen der Aktuatoren auf der Balkenoberfläche oder Hilfslager verändern sich jedoch der Schlankheitsgrad und das strukturdynamische Verhalten des Balkens signifikant. Wissenschaftliches Ziel des in dieser Arbeit verfolgten Ansatzes und Hauptunterschied zu den in der Literatur gefundenen Arbeiten ist es, die aktive Stabilisierung auch ohne Veränderung des Schlankheitsgrades und strukturdynamischen Verhaltens des unregulierten, passiven Balkensystems zu erreichen.

3 Mathematische Beschreibung der aktiven Stabilisierung gegen Knicken

Dieses Kapitel stellt das in der vorliegenden Arbeit betrachtete lasttragende System und das verwendete Prinzip der aktiven Stabilisierung gegen Knicken analytisch vor. In den vorangegangenen Kapiteln wurde in allen Gleichungen die Zeit $t = 0$ gesetzt, um z. B. die statische kritische Knicklast zu berechnen. Das Versagen durch Knicken ist jedoch ein plötzlicher, zeitabhängiger Vorgang, [55]. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel die Zeit $t > 0$ eingeführt, um im Folgenden eine kinetische Betrachtung der Balkenauslenkung $w(x, t)$ zu ermöglichen.

Ausgangsstruktur ist ein ideal gerader Balken mit Rechteckquerschnitt und konstanter axialer Drucklast $F_x > 0$ in x -Richtung, Abbildung 2.2 und 3.1a. Der Balken knickt lateral aufgrund seiner rechteckigen Querschnittsfläche und seines geringen Flächenträgheitsmoments um die y -Achse vorzugsweise in z -Richtung aus, Abbildung 2.2. Dieser ist einseitig gelenkig gelagert und einseitig fest eingespannt, bekannt auch als EULER-Fall 3, [26]. Für eine Belastung $F_x \geq F_{x,cr}$ kann ein Stabilitätsversagen durch Knicken mit großen lateralen Auslenkungen $w_b(x)$ auftreten, Abschnitt 2.1 und Abbildung 3.1a. Der Index b steht für Knicken (engl. buckling). In der nachfolgenden Abbildung 3.1 sind zur Verdeutlichung alle Auslenkungen stark vergrößert dargestellt.

Wirkt auf einen Balken zusätzlich zur axialen Drucklast F_x eine laterale zeitabhängige Störkraft $F_{z,d}(t) \ll F_{x,cr}$ mit Index d (engl. disturbance) auf den ideal geraden Balken, so kann er sich bei Lasten $0 < F_x < F_{x,cr}$ bereits unterhalb der kritischen Knicklast mit $w_d(x, t)$ auslenken, Abbildung 3.1b. Die Störkraft wirkt an der Stelle des Maximums der ersten Eigenform auf den Balken, an der sie die größte Auswirkung auf ein Ausknicken mit $w_b(x)$ für $F_x \lesssim F_{x,cr}$ hat.

Abbildung 3.1c stellt einen axial belasteten Balken mit Vorauslenkung $w_v(x)$ dar. Die Vorauslenkung stellt sich infolge von Fertigungstoleranzen und der Axiallast $0 < F_x < F_{x,cr}$ ein, [26]. Die ertragbare Last des Balkens kann durch die Vorauslenkung im Vergleich zum idealen Balken herabgesetzt werden, Abschnitt 2.2.

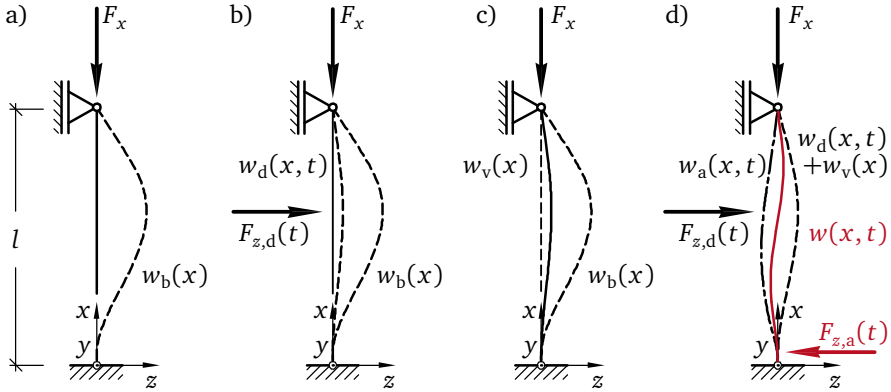


Abbildung 3.1: a) Ideal gerader Balken (—) knickt für $F_x \geq F_{x,cr}$ mit Auslenkung $w_b(x)$ (---), b) ideal gerader Balken (—) mit Störkraft $F_{z,d}(t)$ und resultierender Auslenkung $w_d(x, t)$ (---) für $0 < F_x < F_{x,cr}$, c) Balken mit Vorauslenkung $w_v(x)$ (—) bei $0 < F_x < F_{x,cr}$, d) vorausgeknicktes, aktiv stabilisiertes Balkensystem mit aktiver Kraft $F_{z,a}(t)$ mit Auslenkung $w_a(x, t)$ (---) und resultierender Auslenkung $w(x, t)$ (—) für $F_x \geq F_{x,cr}$

In Abbildung 3.1d ist das in der vorliegenden Arbeit verwendete Prinzip der aktiven Stabilisierung des Balkens gegen Knicken dargestellt. Nahe der festen Einspannung greift eine lateral stabilisierende aktive Kraft $F_{z,a}(t)$ an, die Störgrößen wie Vorauslenkungen und Störkräfte kompensiert sowie die ertragbare Last erhöhen kann, indem sie den Balken in der Ruhelage $w(x, t)$ hält. Die in Abbildung 3.1d stark vergrößert dargestellte Ruhelage $w(x, t)$ ergibt sich aus der Überlagerung der ebenfalls stark vergrößert dargestellten Auslenkungen $w_d(x, t) + w_v(x)$ infolge der Störkraft und Vorauslenkung sowie $w_a(x, t)$ infolge der stabilisierenden aktiven Kraft mit Index $\substack{a}{\square}$.

Das Versagen des Balkens aus der Ruhelage heraus wird im Rahmen dieser Arbeit als *Stabilitätsversagen durch Knicken* anstelle von *Druckbiegung* bezeichnet, da stets von kleinen Anfangsverformungen im geregelten Fall ausgegangen wird. Die Überlagerung bzw. Superposition von Auslenkungen ist bei einem nichtlinearen System wie dem vorliegenden Balkensystem mit Vorauslenkung in der Theorie nicht gültig. Bei hinreichend kleinen Auslenkungen kann hier jedoch davon ausgegangen werden, dass nur ein vernachlässigbar kleiner Fehler gemacht wird, [26].

3.1 Regelungskonzept zur aktiven Stabilisierung

Die statische Knickgleichung, mit der die kritische Knicklast berechnet wird, ist ein Spezialfall der Schwingungs-Differentialgleichung. In Kapitel 4 wird die zeitabhängige Schwingungs-Differentialgleichung des axial belasteten Balkens aufgestellt. Für die Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung und die spätere Einführung der modalen Regelung in Abschnitt 5.3 wird eine Trennung der Veränderlichen nach Ort und Zeit sowie modale Zerlegung der Auslenkung

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(x, F_x) q_n(t), \quad N \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

durchgeführt, mit modaler Auslenkung $q_n(t)$ als maximaler relativer Wert der axiallastabhängigen n -ten Schwingungseigenform $\Phi_n(x, F_x)$ des Balkens. Der Index n ist der n -ten Schwingungseigenform zugeordnet. In Abbildung 3.2 sind beispielhaft die ersten drei modalen Auslenkungen und Schwingungseigenformen des axial belasteten Balkens dargestellt, die später für die Regelung verwendet werden.

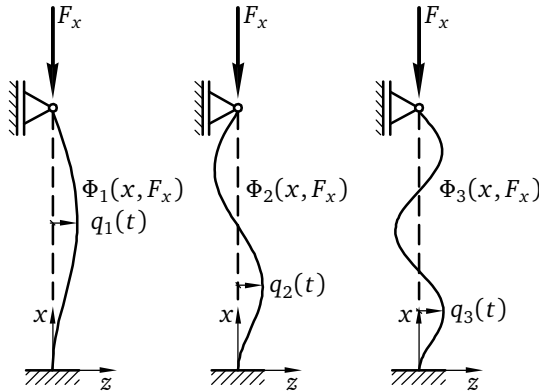


Abbildung 3.2: Modale Zerlegung der Auslenkung $q_n(t)$ des Balkens, Darstellung der ersten drei Schwingungseigenformen $\Phi_n(x, F_x)$

Ziel der Regelung zur aktiven Stabilisierung gegen Knicken ist das Verschwinden der ersten modalen Auslenkung $q_1(t) = q_{1,\text{ideal}}(t) + q_v \rightarrow 0$, die kritisch für das Ausknicken ist, [55]. Die zeitlich konstante Vorauslenkung q_v wird zur modalen Auslenkung in der ersten Schwingungseigenform des ideal geraden, unbelasteten Balkens addiert,

$$w_1(x, t) = (q_{1,\text{ideal}}(t) + q_v) \cdot \Phi_1(x, F_x = 0). \quad (3.2)$$

Im Experiment wird mit resistiven Dehnmessstreifen (DMS) die Balkendehnung erfasst, in die Balkenauslenkung umgerechnet und nach (3.1) modal zerlegt. Die erste modale Auslenkung $q_1(t)$ ist kritisch und ist die Regelgröße. Es kommen mehrere modale Feedback-Regler zum Einsatz, die mittels gesteuerter Adaption abhängig von der Axiallast F_x ausgewählt werden und $q_1(t) \rightarrow 0$ regeln. Diese Kombination aus Feedforward- und Feedback-Ansatz wird in Abschnitt 5.3 näher erläutert.

Im Verzweigungsdiagramm, Abbildung 3.3 rechts, ist die modale Auslenkung $q_1(t)$ der für das Knicken kritischen ersten Schwingungseigenform über der Axiallast F_x aufgetragen. Darin sind die vier Fälle a) bis d) aus Abbildung 3.1 gekennzeichnet. Die zweite und dritte modale Auslenkung $q_2(t)$ und $q_3(t)$ sind für das Knickversagen nicht kritisch.

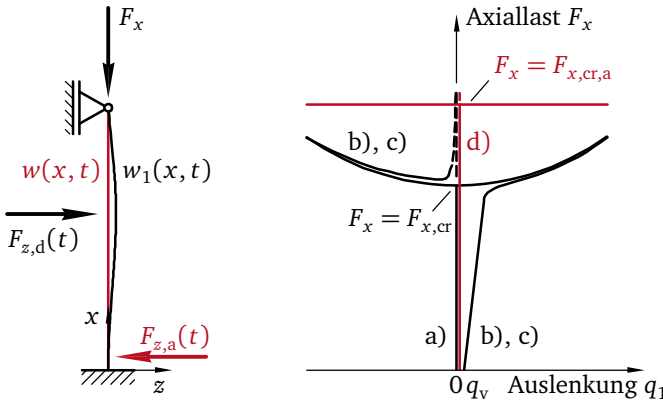


Abbildung 3.3: Links: Balken, rechts: Verzweigungsdiagramm bzw. Kraft-Auslenkungsdiagramm mit stabilen (—) und instabilen (---) Gleichgewichtslagen für a) ideal geraden Balken, b) ideal geraden Balken mit Störkraft, c) Balken mit Vorauslenkung, vgl. [26], d) aktiv stabilisiertes Balkensystem

Für den **ideal geraden Balken** aus Abbildung 3.1a ergibt sich für eine axiale Drucklast $F_x < F_{x,cr}$ eine stabile Gleichgewichtslage mit $q_1 = 0$, Abbildung 3.3 rechts, Fall a). Bei $F_x \geq F_{x,cr}$ verzweigt sich das Diagramm und es ergeben sich zwei stabile Gleichgewichtslagen mit unterschiedlichem Vorzeichen und $q_1 \neq 0$ sowie eine instabile Gleichgewichtslage mit $q_1 = 0$.

Wirkt eine **seitliche Störkraft** $F_{z,d}(t)$ auf einen geraden Balken Abbildung 3.3 links, so vergrößert sich die Auslenkung q_1 mit zunehmender Axiallast, Abbildung 3.3 rechts, Fall b). Besteht eine endliche konstante **Vorauslenkung** q_v , so

vergrößert sich auch hier die Auslenkung q_1 mit zunehmender Axiallast, Fall c). In beiden Fällen b) und c) existieren eine zweite stabile sowie eine instabile Gleichgewichtslage im Bereich negativer Auslenkung $q_1 < 0$ bzw. entgegengesetzt zur Vorauslenkung oder Störkraft.

Ziel der **aktiven Stabilisierung** gegen Knicken ist eine Verringerung der Auslenkung des Balkens infolge der Vorauslenkung q_v und der Störkraft $F_{z,d}(t)$ durch geregeltes Eingreifen einer aktiven Kraft $F_{z,a}(t)$. Dadurch ist es möglich, den Balken über die theoretisch berechnete kritische Knicklast hinaus in der instabilen Gleichgewichtslage mit Auslenkung $q_1 \approx 0$ zu halten, Abbildung 3.3 rechts, Fall d). Die Auslenkung des aktiv stabilisierten Systems nimmt bei $F_x = F_{x,cr,a}$ sprunghaft zu, da der überkritisch belastete Balken instabil ist und der Verlauf ist deswegen als horizontale Gerade angegeben, Fall d). Der kritisch belastete Balken ist hingegen grenzstabil, wodurch die leichte Zunahme der kritischen Last für steigende Auslenkungen in den Fällen a) bis c) begründet ist.

3.2 Annahmen für die aktive Stabilisierung

Als **Lagerungsbedingung** wird ein einseitig fest eingespannter und einseitig gelenkig gelagerter Balken angenommen, Abbildung 3.3. Der Einfluss der asymmetrischen Lagerungsbedingungen auf die Stabilisierung des Balkensystems gegen Knicken wird untersucht.

Für den Balken wird ein **Rechteckquerschnitt** angenommen, dessen Breite deutlich größer als seine Dicke ist. Damit ergeben sich um die y - und z -Achse unterschiedlich große Flächenträgheitsmomente. Der Balken knickt zuerst um die Achse des kleinsten Flächenträgheitsmoments $I = I_y \ll I_z$, d. h. Knicken tritt am betrachteten Balkensystem zuerst in der x - z -Ebene auf. Torsion wird nicht berücksichtigt.

Als **Störgrößen** werden eine Vorauslenkung und eine Störkraft zugelassen. Die laterale **Vorauslenkung** q_v des Balkens ist nicht zeitabhängig und wird in der ersten Eigenform angenommen. Die laterale **Störkraft** $F_{z,d}(t) \ll F_x$ und $F_{z,d}(t) \ll F_{z,a}(t)$ ist zeitabhängig und wirkt an der Stelle des Maximums der ersten Eigenform, an der sie die größte Wirkung auf ein Ausknicken des Balkens hat. Ein exzentrischer Lastangriff wird nicht berücksichtigt.

3.3 Fazit zum Konzept der aktiven Stabilisierung

Die **aktive Stabilisierung** gegen Knicken hat das Ziel, ein Ausknicken des Balkens trotz überkritischer Axiallast $F_x > F_{x,cr}$ zu verhindern. Die laterale Auslenkung $w(x, t)$ wird für die Regelung zunächst nach (3.1) modal zerlegt. Die erste Eigenform ist für das Knicken kritisch. Mittels einer modalen Regelung werden **aktive Kräfte** nahe der Einspannung in den Balken eingeleitet, um seine modale Auslenkung in der ersten Eigenform $q_1(t) \rightarrow 0$ zu halten und damit das Knicken zu verhindern. Durch Wirkung der aktiven Kräfte nahe der Einspannung bleibt die Balkenoberfläche weitestgehend frei von Aktuatoren. Dies hat den Vorteil, dass der Balken über einen Großteil seiner Balkenlänge nicht im Schlankheitsgrad verändert wird und die Vergleichbarkeit zu einem passiven Balken für Unsicherheitsuntersuchungen gewährleistet bleibt. Aktuatoren nahe der Einspannung können im Vergleich zu Aktuatoren in der Balkenmitte durch Stellen relativ kleiner Wege bei gleichzeitig relativ hohen Kräften den Balken gegen Knicken stabilisieren. Eine detaillierte Beschreibung der eingesetzten Regelung erfolgt in Abschnitt 5.3.

Die aktive Stabilisierung verhindert das plötzliche Stabilitätsversagen eines kritisch oder überkritisch belasteten Balkens, das bereits durch kleine Schwankungen in der axialen oder lateralen Belastung große Verformungen nach sich ziehen kann.

Auf den Balken mit über der Balkenlänge konstanter Querschnittsfläche A , konstanter Biegesteifigkeit $EI = EI_y$ und konstanter Dichte ρ können zusätzlich zur Axiallast F_x zeitabhängige laterale Kräfte $f(x, t)$ wirken. Die Strukturdämpfung des Balkens wird vernachlässigt. Daraus resultiert die zeit- und ortsabhängige Auslenkung $w(x, t)$ mit ihrer zweiten und vierten örtlichen Ableitung $w''(x, t)$ in $1/m$ und $w''''(x, t)$ in $1/m^3$ sowie ihrer zweiten zeitlichen Ableitung $\ddot{w}(x, t)$ in m/s^2 ,

$$EI w''''(x, t) + F_x w''(x, t) + \rho A \ddot{w}(x, t) = f(x, t), \quad (4.1)$$

[55]. Die Indizes $'$ und $\ddot{}$ stehen für örtliche und zeitliche Ableitung einer Größe. Die extern lateral angreifenden aktive Kraft $F_{z,a}(t)$ und Störkraft $F_{z,d}(t)$ können nach [26] als

$$f(x, t) = F_{z,a}(t) \delta(x - x_a) + F_{z,d}(t) \delta(x - x_d) \quad (4.2)$$

formuliert werden, für die Störkraft $F_{z,d}(t)$ mit der DIRAC-Verteilung $\delta(x - x_d) = 0$ für $x \neq x_d$ und $\int_0^l \delta(x - x_d) dx = 1$ an der Stelle $x = x_d$. Analog kann für die aktive Kraft

$$F_{z,a}(t) = F_{a,l}(t) - F_{a,r}(t) \quad (4.3)$$

an der Stelle x_a die DIRAC-Verteilung $\delta(x - x_a) = 0$ für $x \neq x_a$ und $\int_0^l \delta(x - x_a) dx = 1$ aufgestellt werden, Abbildung 4.1. Für $F_{a,l}(t) > F_{a,r}(t)$ wirkt $F_{z,a}(t)$ in positive z -Richtung, für $F_{a,l}(t) < F_{a,r}(t)$ wirkt $F_{z,a}(t)$ in negative z -Richtung.

Für die Modellbildung des Balkensystems gelten folgende Annahmen:

- linear-elastisches, isotropes Materialverhalten (HOOKE'sches Gesetz)
- elastisches EULER-Knicken (Schlankheitsgrad $s \gg s_{\text{grenz}}$)
- Knicken vorzugsweise um y -Achse (flaches Rechteckprofil mit $I = I_y \ll I_z$)
- Schubfreiheit (EULER-BERNOULLI-Balkentheorie)
- kleine Verformungen (Balkensystem wird nahe Ruhelage $q_1(t) \approx 0$ gehalten)
- Dämpfung wird vernachlässigt
- Torsion wird vernachlässigt
- asymmetrische fest-gelenkige Lagerungsbedingungen.

Trennung der Veränderlichen

Aufspaltung der zeitlichen und örtlichen Terme in Gleichung (4.1) vereinfacht die Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung. Der BERNOULLISCHE Separationsansatz führt zu einer Aufspaltung der Auslenkung

$$w(x, t) = W(x) r(t) \quad (4.4)$$

in die Ortsfunktion $W(x)$ und die Zeitfunktion $r(t)$, [55]. Einsetzen von (4.4) in (4.1) für $f(x, t) = 0$ und Division durch $W(x) r(t)$ liefert eine zeitliche und eine örtliche Differentialgleichung für freie Balkenschwingungen unter axialer Last F_x , die über die Eigenkreisfrequenz ω gekoppelt sind,

$$\frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} = -\frac{EI W''''(x)}{\rho A W(x)} - \frac{F_x W''(x)}{\rho A W(x)} = -\omega^2, \quad (4.5)$$

[55]. $W''(x)$ und $W''''(x)$ sind die zweite und vierte örtlichen Ableitung der lateralen Auslenkung $W(x)$ des Balkens sowie $\ddot{r}(t)$ die zweite zeitliche Ableitung der Zeitfunktion $r(t)$.

4.1.1 Kritische axiale Knicklast und Knickeigenformen des Balkens

In diesem Abschnitt wird hergeleitet und ermittelt, ab welcher kritischen Last und mit welcher Knickeigenform der Balken aus Abbildung 4.1 bei zunächst $F_{z,d}(t) = 0$ und $F_{z,a}(t) = 0$ ausknickt, d.h. seine Stabilität verliert. Zur Berechnung der kritischen Knicklast und der Knickeigenformen eines Balkens wird Gleichung (4.5) durch Nullsetzen von ω vereinfacht zu

$$EI W''''(x) + F_x W''(x) = 0, \quad (4.6)$$

[26], mit Biegesteifigkeit EI und Axiallast F_x . Axiallasten $F_x > 0$ werden als Drucklasten angenommen, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Mit

$$\Lambda^2 = \frac{F_x}{EI} \quad (4.7)$$

lautet die allgemeine Lösung $W(x)$ von Gleichung (4.6) mit den Konstanten C_{1-4}

$$W(x) = C_1 \cos \Lambda x + C_2 \sin \Lambda x + C_3 \Lambda x + C_4, \quad (4.8)$$

[26] und ihre örtlichen Ableitungen

$$W'(x) = -C_1 \Lambda \sin \Lambda x + C_2 \Lambda \cos \Lambda x + C_3 \Lambda, \quad (4.9)$$

$$W''(x) = -C_1 \Lambda^2 \cos \Lambda x - C_2 \Lambda^2 \sin \Lambda x. \quad (4.10)$$

Die vier Konstanten C_{1-4} werden im Folgenden aus den vier Randbedingungen der fest-gelenkigen Lagerung ermittelt.

Eigenwertproblem der Knick-Differentialgleichung

Das Eigenwertproblem wird im Folgenden hergeleitet und gelöst, um die kritische Knicklast und die Knickeigenformen für das konkrete Balkensystem aus Abbildung 4.1 zu berechnen.

Einsetzen der fest-gelenkigen Lagerungsbedingungen

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0, \quad W(l) = 0 \quad \text{und} \quad W''(l) = 0 \quad (4.11)$$

aus Abbildung 4.1 in Gleichung (4.8) bis (4.10) liefert folgendes Gleichungssystem, dessen Determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Lambda & \Lambda & 0 \\ \cos \Lambda l & \sin \Lambda l & \Lambda l & 1 \\ -\Lambda^2 \cos \Lambda l & -\Lambda^2 \sin \Lambda l & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

die **charakteristische Gleichung** ergibt

$$\boxed{\tan \Lambda_n l = \Lambda_n l,} \quad (4.13)$$

[26]. Die nichttriviale Lösung der charakteristischen Gleichung kann graphisch oder numerisch z. B. mit dem MATLAB-Befehl `fsolve` erfolgen und liefert für $n = 1$ bis 3 die Eigenwerte Λ_n

$$\Lambda_1 = 4,49/l, \quad \Lambda_2 = 7,73/l, \quad \text{und} \quad \Lambda_3 = 10,90/l. \quad (4.14)$$

Knicklasten

Anhand der Eigenwerte lassen sich die erste (kritische) und höhere Knicklasten

$$\boxed{F_{x,\text{cr},n} = \Lambda_n^2 EI} \quad (4.15)$$

berechnen.

Knickeigenformen

Bei Vorgabe von $C_1 = 1$ können mit Gleichung (4.8) bis (4.11) die Konstanten C_{2-4} und die zugehörigen Knickeigenformen

$$\boxed{W_{b,n}(x) = \cos \Lambda_n x - \frac{\sin \Lambda_n x}{\Lambda_n l} + \frac{x}{l} - 1} \quad (4.16)$$

ermittelt werden, [26].

4.1.2 Eigenkreisfrequenzen, Schwingungs- und Dehnungseigenformen des Balkens

In diesem Abschnitt wird das Eigenschwingungsverhalten des axial belasteten Balkens hergeleitet und ermittelt, nachdem aus dem vorigen Abschnitt die kritische Knicklast und die Knickeigenformen bekannt sind. Berechnet werden die Eigenkreisfrequenzen und Schwingungseigenformen des Balkens ohne äußere Kräfte.

Zunächst wird die örtliche homogene Schwingungs-Differentialgleichung aus Gleichung (4.5) aufgestellt und $W(x)$ durch die von der Axiallast F_x abhängigen Schwingungseigenformen $\Phi(x, F_x)$ ersetzt,

$$EI \Phi''''(x, F_x) + F_x \Phi''(x, F_x) - \rho A \omega^2 \Phi(x, F_x) = 0. \quad (4.17)$$

Die allgemeine Form der Schwingungseigenformen ist

$$\Phi(x, F_x) = C_5 \cosh k_1 x + C_6 \sinh k_1 x + C_7 \cos k_3 x + C_8 \sin k_3 x, \quad (4.18)$$

[55]. Deren örtlichen Ableitungen sind

$$\Phi'(x, F_x) = C_5 k_1 \sinh k_1 x + C_6 k_1 \cosh k_1 x - C_7 k_3 \sin k_3 x + C_8 k_3 \cos k_3 x, \quad (4.19)$$

$$\Phi''(x, F_x) = C_5 k_1^2 \cosh k_1 x + C_6 k_1^2 \sinh k_1 x - C_7 k_3^2 \cos k_3 x - C_8 k_3^2 \sin k_3 x. \quad (4.20)$$

Eigenwertproblem der Schwingungs-Differentialgleichung

Das Eigenwertproblem wird im Folgenden hergeleitet und gelöst, um die Eigenkreisfrequenzen und die Schwingungseigenformen für das Balkensystem aus Abbildung 4.1 zu berechnen.

Die Lagerungsbedingungen lauten analog zu Gleichung (4.11)

$$\Phi(0, F_x) = 0, \quad \Phi'(0, F_x) = 0, \quad \Phi(l, F_x) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi''(l, F_x) = 0. \quad (4.21)$$

Die Parameter k_1, k_3 sind der später folgenden besseren Lesbarkeit halber nicht in Abhängigkeit von der Axiallast F_x notiert,

$$k_1 = k_1(F_x) = \sqrt{\sqrt{\kappa_n^4(F_x) + \psi^4(F_x)} + \psi^2(F_x)}, \quad (4.22)$$

$$k_3 = k_3(F_x) = \sqrt{\sqrt{\kappa_n^4(F_x) + \psi^4(F_x)} - \psi^2(F_x)}, \quad (4.23)$$

mit noch unbekannten $\kappa_n(F_x)$ und dem Axiallastparameter $\psi(F_x)$

$$\psi(F_x) = \sqrt{\frac{-F_x}{EI}}. \quad (4.24)$$

Nach Einsetzen der für alle F_x gültigen fest-gelenkigen Lagerungsbedingungen aus Gleichung (4.21) in (4.18) bis (4.20) ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem. Dessen Determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & k_3 \\ \cosh k_1 l & \sinh k_1 l & \cos k_3 l & \sin k_3 l \\ k_1^2 \cosh k_1 l & k_1^2 \sinh k_1 l & -k_3^2 \cos k_3 l & -k_3^2 \sin k_3 l \end{bmatrix} = 0 \quad (4.25)$$

liefert die **charakteristische Gleichung**

$$(k_1^3 + k_1 k_3^2) \cosh(k_1 l) \sin(k_3 l) - (k_3^3 + k_1^2 k_3) \sinh(k_1 l) \cos(k_3 l) = 0. \quad (4.26)$$

Aus Gleichung (4.26) mit (4.22) und (4.23) werden die Nullstellen $\kappa_n(F_x)$ numerisch mit dem MATLAB-Befehl `fsolve` berechnet. Für den unbelasteten Balken mit $F_x = 0$ ergeben sich für $n = 1$ bis 3

$$\kappa_1 = 3,92/l, \quad \kappa_2 = 7,07/l, \quad \text{und} \quad \kappa_3 = 10,21/l. \quad (4.27)$$

Eigenkreisfrequenzen

Mit $\kappa_n(F_x)$ lassen sich ebenfalls die Eigenkreisfrequenzen $\omega_n(F_x)$ des Balkens ermitteln:

$$\omega_n(F_x) = \kappa_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad (4.28)$$

[55]. Die Eigenkreisfrequenzen sind erwartungsgemäß ebenfalls abhängig von der konstanten Axiallast F_x .

In Abbildung 4.2 sind die ersten drei bezogenen Eigenkreisfrequenzen $\omega_n(F_x)/\omega_1(F_x = 0)$ für $n = 1$ bis 3 über der bezogenen Axiallast $F_x/F_{x,\text{cr}} = 0,85$ bis ca. 1,5 aufgetragen. Die Werte sind an den am experimentellen Aufbau in Kapitel 6 auftretenden Axiallasten orientiert und sind iterativ ermittelt. Die Symbole $\Im\{\cdot\}$ und $\Re\{\cdot\}$ beschreiben Imaginärteil und Realteil einer Größe.

Die Eigenkreisfrequenzen nehmen mit zunehmender Drucklast F_x ab. Die erste Eigenkreisfrequenz $\omega_1(F_{x,\text{cr}})$ verschwindet, wenn der Balken mit der ersten kritischen Knicklast $F_{x,\text{cr}}$ belastet wird. Für überkritische Axiallasten $F_x > F_{x,\text{cr}}$ nimmt die erste Eigenkreisfrequenz komplexe Werte an, mit Imaginärteil $\Im\{\omega_1\} > 0$ und Realteil $\Re\{\omega_1\} = 0$.

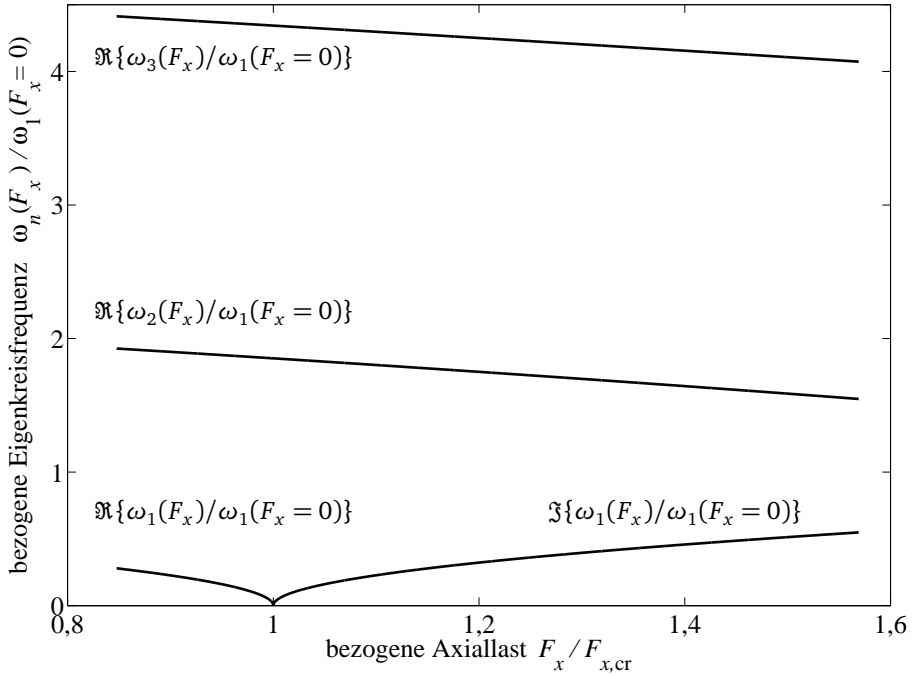


Abbildung 4.2: Bezogene Eigenkreisfrequenzen $\omega_n(F_x)/\omega_1(F_x = 0)$ für $n = 1$ bis 3 über bezogener Axiallast $F_x/F_{x,cr}$

Schwingungseigenformen

Mit Kenntnis des Axiallastparameters $\psi(F_x)$ und der Nullstellen $\kappa_n(F_x)$ können nun k_1 und k_3 für jede Axiallast F_x und jedes n ermittelt werden. Bei Vorgabe von $C_5 = 1$ können mit Gleichung (4.18) bis (4.21) die Konstanten C_{6-8} und die Schwingungseigenformen

$$\Phi_n(x, F_x) = \cosh k_1 x - \coth k_1 l \left(\sinh k_1 x - \frac{k_1}{k_3} \sin k_3 x \right) - \cos k_3 x \quad (4.29)$$

und k_1 und k_3 aus Gleichung (4.22) und (4.23) berechnet werden, [48].

Ebenso wie die Eigenkreisfrequenzen sind auch die Schwingungseigenformen $\Phi_n(x, F_x)$ abhängig von F_x . Abbildung 4.3 zeigt, wie sich die Axiallast auf die ersten drei Schwingungseigenformen $\Phi_n(x, F_x)$ für $n = 1$ bis 3 im Vergleich zu den axiallastunabhängigen ersten drei Knickeigenformen $W_{b,n}(x)$ auswirkt. Alle Knick- und Schwingungseigenformen sind auf 1 normiert.

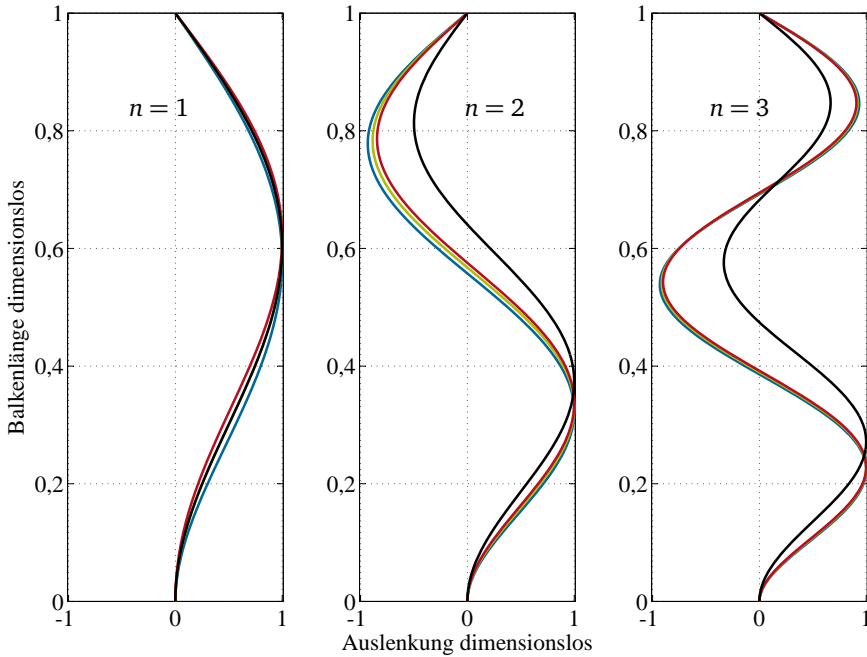


Abbildung 4.3: Dimensionslose Auslenkung der Knickeigenform $W_{b,n}(x)$ (—) und der Schwingungseigenformen $\Phi_n(x, F_{x,0})$ (—), $\Phi_n(x, F_{x,cr})$ (—) und $\Phi_n(x, F_{x,ue})$ (—) für $n = 1$ bis 3, vgl. [20]

Die Schwingungseigenformen des axial belasteten Balkens aus Gleichung (4.29) unterscheiden sich scheinbar nur unwesentlich für die drei Axiallasten $F_{x,0} = 0$ (unbelastet), $F_{x,cr}$ (kritisch) und $F_{x,ue} = 1,5 F_{x,cr}$ (überkritisch), Abbildung 4.3. Die erste Schwingungseigenform $\Phi_1(x, F_{x,cr})$ für $n = 1$ des kritisch belasteten Balkens ist identisch mit der ersten Knickeigenform $W_{b,1}(x)$ und wird in Abbildung 4.3 überdeckt.

Dehnungseigenformen des Balkens

Die modale Auslenkung $q(t)$ nach Abschnitt 3.1 dient als Regelgröße des in Abschnitt 5.3 beschriebenen Reglers. Im Experiment, Kapitel 6, wird die Dehnung des Balkens an mehreren Stellen gemessen. Um im Experiment die modale Auslenkung aus den Dehnungssignalen ermitteln zu können, wird die Gleichung für die **Balkendehnung** aufgestellt,

$$\varepsilon_n(x, F_x) = \frac{h}{2} \Phi_n''(x, F_x). \quad (4.30)$$

Darin ist $h/2$ der Abstand zwischen der neutralen Faser in der Balkenmitte und der Randfaser an der Balkenoberfläche, an der die Dehnung berechnet werden soll. Die **zweite örtliche Ableitung der Balkenauslenkung** in (4.30) lautet

$$\Phi_n''(x, F_x) = k_1^2 \cosh k_1 x - k_1^2 \coth k_1 l \left(\sinh k_1 x + \frac{k_3}{k_1} \sin k_3 x \right) + k_3^2 \cos k_3 x. \quad (4.31)$$

Abbildung 4.4 zeigt die zur Auslenkung aus Abbildung 4.3 zugehörige dimensionslose Dehnung. Das Vorzeichen der Dehnungsverläufe ergibt sich aus der Festlegung, dass die Dehnung an der Balkenoberfläche mit positiver z -Koordinate betrachtet wird, Abbildung 4.1. Eine Stauchung des Werkstoffs entspricht einer negativen Dehnung, eine Streckung des Werkstoffs entspricht einer positiven Dehnung.

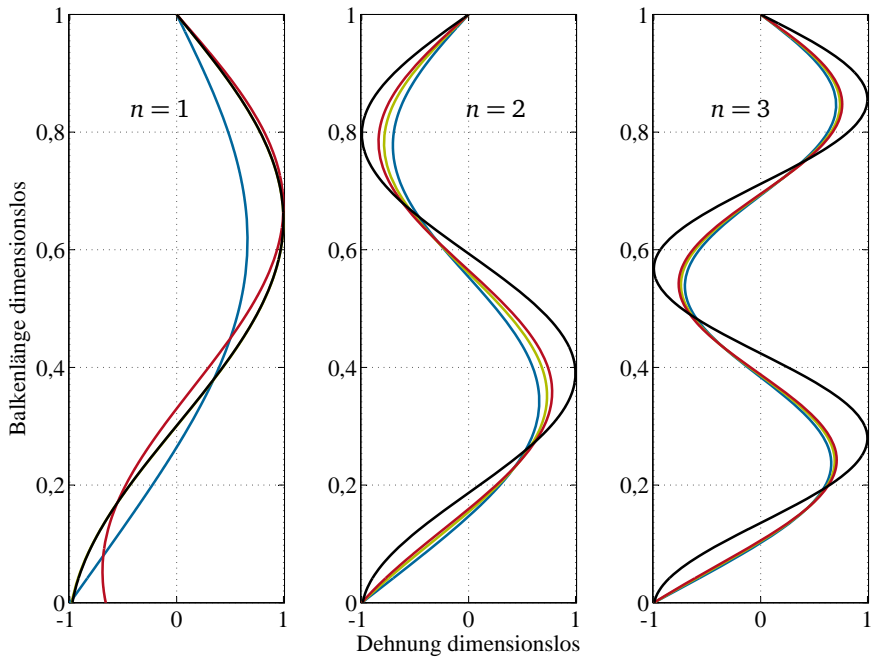


Abbildung 4.4: Dimensionslose Dehnung der Knickeigenform $W''_{b,n}(x)$ (—) und der Schwingungseigenformen $\Phi_n''(x, F_{x,0})$ (—), $\Phi_n''(x, F_{x,cr})$ (—) und $\Phi_n''(x, F_{x,ue})$ (—) für $n = 1$ bis 3

Die Dehnungen der ersten Schwingungseigenformen $\Phi_1''(x, F_{x,0})$, $\Phi_1''(x, F_{x,cr})$ und $\Phi_1''(x, F_{x,ue})$ des axial belasteten Balkens in Abbildung 4.4 nach Gleichung

(4.31) unterscheiden sich untereinander deutlich, anders als deren Auslenkungen $\Phi_1(x, F_x = 0)$, $\Phi_1(x, F_{x,cr})$ und $\Phi_1(x, F_{x,ue})$ in Abbildung 4.3. Der Einfluss der Axiallast auf die Dehnung der Schwingungseigenformen kann also nicht vernachlässigt werden. Die Dehnung der ersten Schwingungseigenform $\Phi_1''(x, F_{x,cr})$ wird in Abbildung 4.4 von der Dehnung der ersten Knickeigenform $W_{b,1}''(x)$ wie schon bei der Auslenkung überdeckt.

Die Regelgröße ist die modale Auslenkung $\mathbf{q}(t)$, wie in Kapitel 3 beschrieben. Im späteren Experiment wird jedoch die Dehnung gemessen. Das legt den Schluss nahe, dass für eine Ermittlung der modalen Auslenkung $\mathbf{q}(t)$ durch Dehnungsmessung in der numerischen Simulation und im Experiment die wirkende Axiallast F_x benötigt wird. Die Umwandlung der Dehnungen in modale Auslenkungen geschieht im Zustandsraummodell im nächsten Abschnitt, Gleichung (4.39).

4.2 Zeitkontinuierliches Zustandsraummodell

Zur Modellierung des Balkensystems im Zeitbereich wird die Zustandsraumdarstellung (ZRD) verwendet. Die ZRD beschreibt Differentialgleichungen höherer Ordnung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Sie wird v. a. in der Regelungstechnik eingesetzt, um dynamisches Systemverhalten zu modellieren, [1].

Mit dem Zustandsraummodell wird das zuvor beschriebene Knick- und Schwingungsverhalten des aktiven Balkensystems infolge der konstanten axialen Last F_x und der lateralen Kräfte $F_{z,a}(t)$ und $F_{z,d}(t)$ beschrieben und numerisch simuliert.

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung lautet:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad (4.32)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{q}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \quad (4.33)$$

[1]. Für das Balkensystem aus Abbildung 4.1 mit generell $n = N$ berücksichtigten Schwingungseigenformen ist der $[2N \times 1]$ Zustandsvektor $\mathbf{q}(t)$, der $[2 \times 1]$ Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$ der Lateralen Kräfte und der $[2N \times 1]$ Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ der Dehnung sowie die $[2N \times 2N]$ Systemmatrix \mathbf{A} , die $[2N \times 2]$ Eingangsmatrix \mathbf{B} , die $[3 \times 2N]$ Ausgangsmatrix \mathbf{C} und die $[3 \times 2]$ Durchgangsmatrix \mathbf{D} . Am Balken befinden sich drei Messstellen $x_{s,1-3}$ und zwei laterale Kräfte $F_{z,a}(t)$ und $F_{z,d}(t)$ wirken in $\mathbf{u}(t)$. Die Vektoren und Matrizen sind im Einzelnen

$$\mathbf{q}(t) = [\dot{q}_1(t), q_1(t), \dot{q}_2(t), q_2(t), \dots, \dot{q}_N(t), q_N(t)]^T, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{u}(t) = [F_{z,a}(t), F_{z,d}(t)]^T, \quad (4.35)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T. \quad (4.36)$$

Das in Abschnitt 4.1 als ungedämpft angenommene Balkensystem wird nun in der Zustandsraumdarstellung in Gleichung (4.32) um die modale Dämpfung θ_n erweitert. Für jede berücksichtigte Schwingungseigenform wird abhängig von der Axiallast F_x die modale Dämpfung $\theta_{n,\text{exp}}$ aus dem experimentellen Modellabgleich angenommen, Tabelle 6.5. Damit lautet die von der Axiallast F_x abhängige Systemmatrix $A(F_x)$ mit $\omega_n = \omega_n(F_x)$ für wiederum $n = 1$ bis N bei Berücksichtigung aller Schwingungseigenformen

$$A(F_x) = \begin{bmatrix} -2\theta_1\omega_1 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\theta_2\omega_2 & -\omega_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2\theta_N\omega_N & -\omega_N^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Die $[2N \times 2]$ Eingangsmatrix $B(F_x)$ beschreibt die axiallastabhängigen Schwingungseigenformen $\Phi_n(x, F_x)$ an den Positionen x_a der aktiven Kraft $F_{z,a}(t)$ und x_d der Störkraft $F_{z,d}(t)$, Abbildung 4.1,

$$B(F_x) = \frac{1}{\rho A l} \begin{bmatrix} \Phi_1(x_a, F_x) & \Phi_1(x_d, F_x) \\ 0 & 0 \\ \Phi_2(x_a, F_x) & \Phi_2(x_d, F_x) \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_N(x_a, F_x) & \Phi_N(x_d, F_x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Die $[3 \times 2N]$ Ausgangsmatrix $C(F_x)$ für die Dehnung $y(t)$ für $z = h/2$ beinhaltet die Dehnung der Schwingungseigenformen $\Phi''_n(x_{s,1-3}, F_x)$ an den drei Messstellen $x_{s,1-3}$ nach Abbildung 4.1

$$C(F_x) = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Phi''_1(x_{s,1}, F_x) & 0 & \Phi''_2(x_{s,1}, F_x) & \dots & 0 & \Phi''_N(x_{s,1}, F_x) \\ 0 & \Phi''_1(x_{s,2}, F_x) & 0 & \Phi''_2(x_{s,2}, F_x) & \dots & 0 & \Phi''_N(x_{s,2}, F_x) \\ 0 & \Phi''_1(x_{s,3}, F_x) & 0 & \Phi''_2(x_{s,3}, F_x) & \dots & 0 & \Phi''_N(x_{s,3}, F_x) \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Die $[3 \times 2]$ Durchgangsmatrix D beschreibt eine direkte Kopplung von Ein- und Ausgangsvektor. Aufgrund der Trägheit des Balkensystems wird $D = 0$ gesetzt, [1].

4.3 Fazit zur mathematischen Modellbildung

Durch Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung des axial belasteten Balkens lassen sich axiallastabhängige Eigenkreisfrequenzen sowie Auslenkungs- und Dehnungseigenformen berechnen.

Die Eigenkreisfrequenzen $\omega_n(F_x)$ nehmen mit steigender axialer Drucklast ab, die erste Eigenkreisfrequenz $\omega_1(F_x)$ wird für überkritische Axiallasten $F_x > F_{x,cr}$ imaginär.

Die Auslenkungseigenformen $\Phi_n(F_x)$ nach (4.29) und Dehnungseigenformen $\Phi_n''(F_x)$ nach (4.31) verändern sich ebenfalls infolge der Axiallast F_x , da die fest-gelenkigen Lagerungsbedingungen des Balkensystems asymmetrisch sind.

Das Zustandsraummodell nach Gleichung (4.32) und (4.33) beschreibt das zeitabhängige Verhalten des Balkensystems zur numerischen Simulation der modalen Auslenkung $q_n(t)$ und modalen Geschwindigkeit $\dot{q}_n(t)$ im Zustandsvektor $\mathbf{q}(t)$ und Dehnung $\mathbf{y}(t)$ infolge der Axiallast F_x und der lateralen Kräfte $F_{z,a}(t)$ und $F_{z,d}(t)$.

Anhand des axiallastabhängigen numerischen Zustandsraummodells kann in Kapitel 5 die Regelung ausgelegt und implementiert werden.

5 Numerische Simulation der aktiven Stabilisierung gegen Knicken

Dieses Kapitel beschreibt zunächst numerisch das Stabilitätsverhalten des passiven (ungeregelten) Systems. Anschließend werden die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems untersucht und eine Regelung entworfen, die das überkritisch belastete Balkensystem stabilisiert. Der Einfluss von Störkräften und Vorauslenkung auf das Verhalten des aktiven (geregelten) Systems wird schließlich numerisch gezeigt.

Für alle numerischen Simulationen wird das modale Zustandsraummodell aus Kapitel 4 mit $N = 3$ Schwingungseigenformen verwendet, das mit dem experimentellen aktiven Balkensystem aus Kapitel 6, insbesondere Eigenkreisfrequenzen und modaler Dämpfung abgeglichen ist. In experimentellen Untersuchungen ist bei Berücksichtigung von mehr als 3 Schwingungseigenformen am aktiven Balkensystem keine Verbesserung der Stabilisierbarkeit feststellbar.

5.1 Stabilität des passiven Balkensystems

Die Stabilität nach LJAPUNOW ist definiert, dass alle Lösungen eines Differentialgleichungssystems für endliche Anfangswerte für alle Zeiten $t > 0$ endlich bleiben, [41]. Ausgehend von der $[6 \times 6]$ Systemmatrix $A(F_x)$ in (4.37) in der ZRD können aus dem Eigenwertproblem

$$\det(A(F_x) - \lambda_p I) = 0 \quad (5.1)$$

die Eigenwerte

$$\lambda_{p,2n-1} = -\theta_n \omega_n + i\omega_n \sqrt{1 - \theta_n^2}, \quad (5.2)$$

$$\lambda_{p,2n} = -\theta_n \omega_n - i\omega_n \sqrt{1 - \theta_n^2} \quad (5.3)$$

des passiven numerischen Zustandsraummodells (Index p) für $n = 1$ bis 3 mit Einheitsmatrix I und der imaginären Zahl i ermittelt werden, [41], [55]. Diese sind

nicht mit den Eigenwerten Λ_n des Knickproblems aus Abschnitt 4.1.1 zu verwechseln. Die Untersuchung der Stabilität des numerischen Zustandsraummodells kann anhand der Lage der Eigenwerte $\lambda_p = \lambda_{p,2n-1/2n}$ erfolgen, [41]. Besitzen alle Eigenwerte einen negativen Realteil $\Re\{\lambda_{p,2n-1/2n}\} < 0$ oder besitzt ein Eigenwert Realteil $\Re\{\lambda_{p,2n-1/2n}\} = 0$ und alle anderen einen negativen Realteil $\Re\{\lambda_{p,2n-1/2n}\} < 0$, so liegt stabiles Systemverhalten vor. Nimmt jedoch mindestens ein Eigenwert einen positiven Realteil $\Re\{\lambda_{p,2n-1/2n}\} > 0$ an, so ist die zugehörige Schwingungseigenform $\Phi_n(x, F_x)$ und damit das Gesamtsystemverhalten instabil, [41].

Die nachfolgenden Werte ergeben sich für den in der experimentellen Erprobung in Kapitel 6 verwendeten Balken nach Abbildung 4.1 und Abbildung 6.1 der Länge $l = 0,305 \text{ m}$, Breite $b = 0,020 \text{ m}$ und Dicke $h = 0,001 \text{ m}$ mit E-Modul $E = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ und Dichte $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$. Der Wert $F_{x,\text{un}} = 23,5 \text{ N}$ ist die kleinste am experimentellen Balkensystem einstellbare Axiallast, der Wert $F_{x,\text{un}} = 41,5 \text{ N}$ die iterativ ermittelte Axiallast, bei der das experimentelle Balkensystem trotz Regelung nicht mehr aktiv stabilisiert werden kann, Kapitel 6. Im Verlauf der Arbeit wird das Knickverhalten bei definierten Axiallasten $F_{x,\text{un}} < F_{x,\text{cr}} < F_{x,\text{ue}}$ numerisch und experimentell untersucht, Tabelle 5.1.

Tabelle 5.1: Untersuchte definierte Axiallasten

Axiallast	Beschreibung
$F_{x,\text{un}} = 23,5 \text{ N} \approx 0,85 \cdot F_{x,\text{cr}}$	unterkritische Axiallast (Index \square_{un})
$F_{x,\text{cr}} = 27,8 \text{ N}$	(erste) kritische Knicklast (Index \square_{cr})
$F_{x,\text{ue}} = 41,5 \text{ N} \approx 1,5 \cdot F_{x,\text{cr}}$	überkritische Axiallast (Index \square_{ue})

In Abbildung 5.1 sind die Eigenwertpaare $\lambda_{p,2n-1/2n}$ für $n = 1$ bis 3 in der komplexen Ebene für das axial belastete Balkensystem dargestellt. Eigenwerte für $F_{x,\text{un}}$ werden mit dem Symbol (o) markiert, für $F_{x,\text{cr}}$ mit (+) und für $F_{x,\text{ue}}$ mit (×).

Für Axiallasten $F_{x,\text{un}}$ besitzt der Balken für das erste Eigenwertpaar $\lambda_{p,1/2}$ asymptotisch stabiles Verhalten. Für $F_{x,\text{cr}}$ nimmt das erste Eigenwertpaar $\lambda_{p,1/2}$ (+) den Realteil 0 an und für $F_{x,\text{ue}}$ einen positiven und einen negativen Realteil (×) an, d. h. die zugehörige erste Schwingungseigenform ist grenzstabil (+) bzw. instabil (×). Damit ist auch das Verhalten des Gesamtsystems nicht stabil. Das Verschwinden des Imaginärteils bedeutet, dass das Balkensystem in der ersten Schwingungseigenform für $F_{x,\text{cr}}$ und $F_{x,\text{ue}}$ nicht mehr schwingungsfähig ist und knickt.

Für Axiallasten $F_{x,\text{un}}$, $F_{x,\text{cr}}$ und $F_{x,\text{ue}}$ besitzen die Eigenwertpaare $\lambda_{p,3/4}$ für $n = 2$ und $\lambda_{p,5/6}$ für $n = 3$, die zur zweiten und dritten Schwingungseigenform gehören, einen negativen Realteil und führen auf asymptotisch stabiles Verhalten.

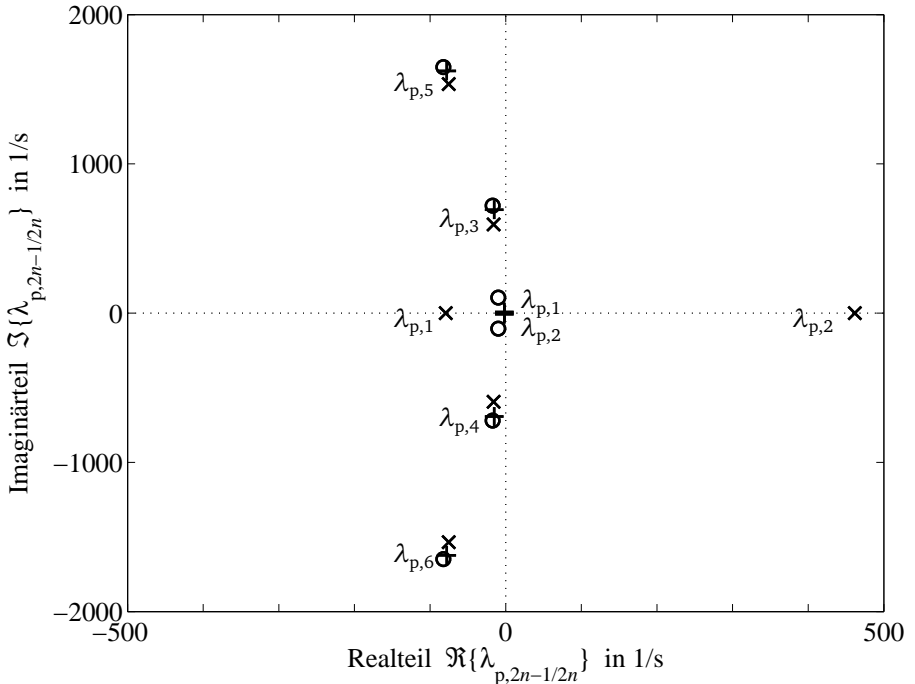


Abbildung 5.1: Eigenwerte $\lambda_{p,2n-1/2n}$ in der komplexen Ebene für passives Balkensystem mit $F_{x,un}$ (○), $F_{x,cr}$ (+) und $F_{x,ue}$ (×) für $n = 1$ bis 3

Der Imaginärteil zeigt die gedämpfte Eigenkreisfrequenz. Dieser nimmt wie erwartet mit zunehmender axialer Drucklast ausgehend von $F_{x,un}$ für $F_{x,cr}$ und $F_{x,ue}$ ab und die Eigenwertpaare nähern sich dem Ursprung des Diagramms.

Das Verhalten des Balkensystems in der ersten Schwingungseigenform verändert sich infolge der Axiallast und bedarf im Folgenden besonderer Aufmerksamkeit. Für das passive Balkensystem sind die zweite und dritte Schwingungseigenform für das Ausknicken selbst nicht von Bedeutung. Bei der aktiven Stabilisierung für überkritische Lasten $F_x > F_{x,cr}$ hingegen ist das Verhalten der zweiten und dritten Schwingungseigenform relevant, da die schwingungsfähige zweite und dritte Eigenform durch die Regelung unbeabsichtigt angeregt werden können.

5.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des aktiven Balkensystems

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind Eigenschaften des aktiven Balkensystems, die für die Auslegung einer Regelung zur Stabilisierung gegen Knicken benötigt

werden. Mit Hilfe der Steuerbarkeit wird der Angriffsort der aktiven Kraft im aktiven Balkensystem auf seine Eignung überprüft. Anschließend werden die Orte der Messstellen auf dem Balken festgelegt und ihre Beobachtbarkeit nachgewiesen.

Steuerbarkeit

Das Balkensystem aus Abbildung 4.1 ist dann vollständig, d. h. für alle Zustandsgrößen $\mathbf{q}(t)$ steuerbar, wenn es durch eine Regelung $u_1(t) = F_{z,a}(t)$ bei x_a von einem Anfangszustand in endlicher Zeit in einen gewünschten Endzustand überführt werden kann, nach [1]. Der Nachweis der Steuerbarkeit des aktiven Balkensystems kann anhand der Systemmatrix $\mathbf{A}(F_x)$ nach (4.37) und Eingangsmatrix $\mathbf{B}(F_x)$ nach (4.38) aus der ZRD aus Abschnitt 4.2 nach dem Kriterium von HAUTUS erfolgen, [40]. Dieses fordert, dass die Bedingung

$$\text{Rang} [\lambda_p \mathbf{I} - \mathbf{A}(F_x), \mathbf{B}(F_x)] = 2N \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, 2N \quad (5.4)$$

für jeden Eigenwert λ_p erfüllt ist, mit der Systemmatrix $\mathbf{A}(F_x)$ nach (4.37) und $2N = 6$ Einträgen des Zustandsvektors $\mathbf{q}(t)$ nach (4.34) für $N = 3$ betrachtete Schwingungseigenformen des Balkensystems in Abbildung 4.1.

Dies bedeutet, dass nahe der Einspannung des Balkens keine der ersten $N = 3$ Schwingungseigenformen einen Schwingungsknoten hat und alle Zustandsgrößen mit einer aktiven Kraft $u_1(t) = F_{z,a}(t)$ bei x_a beeinflusst werden können. Sowohl für $F_{x,\text{un}}$ als auch für $F_{x,\text{ue}}$ ergibt sich ein Rang von $2N = 6$ aus Gleichung (5.4). Damit ist die Steuerbarkeit nachgewiesen.

Festlegung der Messstellen

Der nachfolgend eingeführte Beobachtbarkeitsindex liefert eine Aussage darüber, an welchen Stellen des Balkens Dehnungssensoren den Verformungszustand des Balkensystems hinreichend für die Regelung erfassen können. Dieser ergibt sich für die normierte Dehnung der $N = 3$ Schwingungseigenformen $\Phi_n''(x, F_x)$ nach (4.31) nach [30] wie folgt,

$$\Psi(x, F_x) = \prod_{n=1}^3 |\Phi_n''(x, F_x)| \quad \text{mit } 0 < \Psi(x, F_x) < 1. \quad (5.5)$$

Da die Schwingungseigenformen und deren normierte Dehnung $\Phi_n''(x, F_x)$ von der Axiallast F_x abhängen, muss auch der Beobachtbarkeitsindex $\Psi(x, F_x)$ für jede Axiallast F_x einzeln berechnet werden. Im späteren Experiment wird die Dehnung

gemessen und daraus der Anteil der ersten drei Schwingungseigenformen am Messsignal ermittelt. Mit drei Sensoren kann die modale Auslenkung der ersten drei Schwingungseigenformen infolge der modalen Zerlegung der Dehnungssignale berechnet und geregelt werden. An den Nullstellen von $\Psi(x, F_x)$ nach (5.5) kann mindestens eine Schwingungseigenform – mit Dehnungssensoren – nicht detektiert und folglich auch nicht geregelt werden.

In Abbildung 5.2 ist der Beobachtbarkeitsindex $\Psi(x, F_x)$ nach (5.5) der ersten drei Schwingungseigenformen über der Balkenkoordinate x als Kurvenschar mit 19 Kurven für Axiallasten $F_{x,un}$ bis $F_{x,ue}$ in Schritten von $\Delta F_x = 1 \text{ N}$ dargestellt, die in den Experimenten in Kapitel 6 verwendet werden. Die ausgewiesenen Sensorpositionen $x_{s,1-3}$ sind Abbildung 5.2 zu entnehmen.

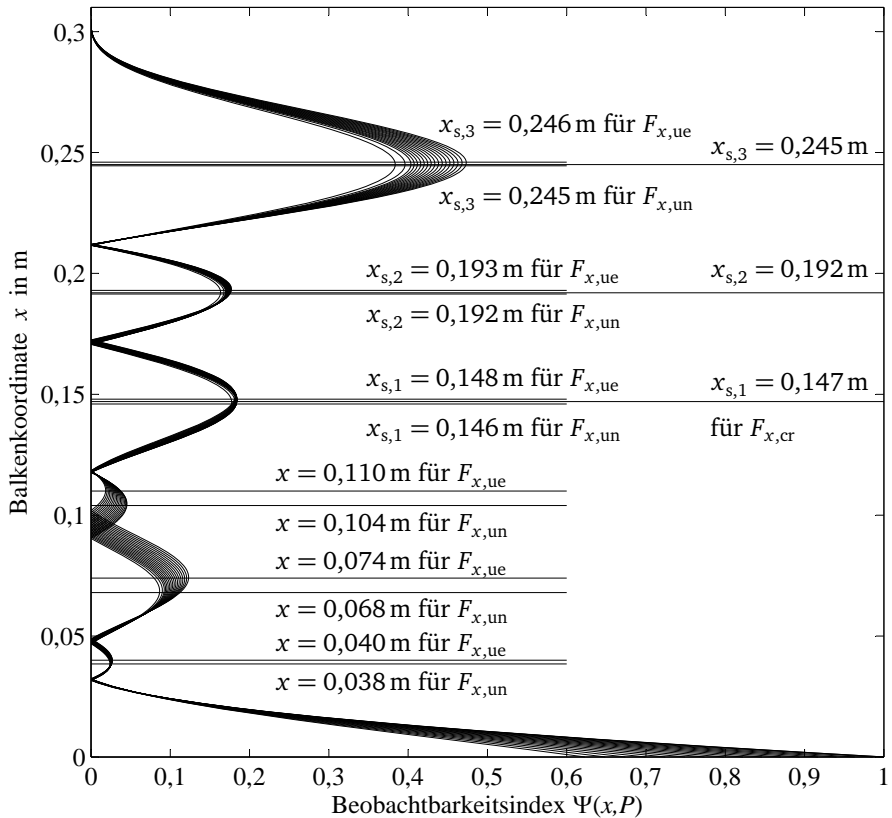


Abbildung 5.2: Beobachtbarkeitsindex der ersten drei Schwingungseigenformen für Axiallasten $F_{x,un}$ bis $F_{x,ue}$

Die Orte der Messstellen werden vorzugsweise an den größten lokalen Maxima des Beobachtbarkeitsindex' platziert, [30]. Die Balkenoberfläche im Bereich der maximalen Dehnung nahe der Einspannung von $x = 0$ m bis $x = 0,03$ m ist für die aktive Kraft vorgesehen und soll daher nicht gleichzeitig als Messstelle belegt sein. Die Messstellen werden an den nächstgrößeren lokalen Maxima für $F_{x,cr}$ festgelegt und auf 0,001 m gerundet. Es ergeben sich $x_{s,1} = 0,147$ m, $x_{s,2} = 0,192$ m und $x_{s,3} = 0,245$ m mit $\Psi(x_{s,1-3}, F_x) > 0,15$.

Da die Dehnungssensoren im späteren Experiment am aktiven Balkensystem in axialer Richtung nicht verschoben werden, ist es anzustreben die Messstellen an denjenigen Maxima des Beobachtbarkeitsindex' zu platzieren, die eine geringe Abweichung in x -Richtung aufweisen. Die Maxima verschieben sich an diesen drei Stellen infolge der Axiallast F_x um maximal 0,002 m. An den Stellen $x = 0,068$ m und $x = 0,104$ m verschiebt sich das Maximum bspw. um 0,006 m in x -Richtung.

Die Verschiebung der lokalen Maxima des Beobachtbarkeitsindex' infolge der Axiallast F_x tritt nur für Balken mit asymmetrischen Lagerungsbedingungen auf, wie im vorliegenden Fall.

Beobachtbarkeit

Das aktive Balkensystem heißt dann vollständig beobachtbar, wenn alle Zustandsgrößen $\mathbf{q}(t)$ nach (4.34) aus den Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ nach (4.35) und Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t)$ nach (4.36) in endlicher Zeit ermittelt werden können, nach [1]. Laut HAUTUS ist ein System genau dann beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \lambda_p \mathbf{I} - \mathbf{A}(F_x) \\ \mathbf{C}(F_x) \end{bmatrix} = 2N \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, 2N \quad (5.6)$$

für jeden Eigenwert λ_p der Systemmatrix $\mathbf{A}(F_x)$ und die Ausgangsmatrix $\mathbf{C}(F_x)$ erfüllt ist, [40]. Für das vorliegende System ergibt sich $\text{Rang } 2N = 6$ für Axiallasten $F_x = 23,5$ N bis 41,5 N.

Es sei nochmals erwähnt, dass zur Berechnung der Beobachtbarkeit bereits die Dehnung der Schwingungeigenformen in der Ausgangsmatrix $\mathbf{C}(F_x)$ nach (4.39) berücksichtigt ist, so dass die Aussage der Beobachtbarkeit für Dehnungssensoren Gültigkeit hat.

5.3 Reglerauslegung zur Stabilisierung gegen Knicken

In diesem Abschnitt wird ein Regler ausgewählt und ausgelegt, der das aktive Balkensystem mittels aktiv in das System eingeleiteter lateraler Kräfte gegen Knicken stabilisiert.

Auswahl eines adaptiven Reglers für das axial belastete Balkensystem

Die Regelaufgabe besteht darin, für Axiallasten $F_{x,\text{un}} < F_x < F_{x,\text{ue}}$ die modale Auslenkung der ersten Schwingungseigenform $q_1(t) \rightarrow 0$ auszuregeln und damit ein Ausknicken des Balkensystems zu verhindern, vgl. Abschnitt 3.1. Da auch laterale Störkräfte $F_{z,d}(t)$ Knicken hervorrufen können, ist die Regelung auch auf diese Belastung auszulegen. Die auszulegende Regelung soll sowohl eine gerade noch stabile, als auch eine instabile Regelstrecke regeln können, deren Eigenkreisfrequenzen $\omega_n(F_x)$ nach (4.28) und Schwingungseigenformen $\Phi_n(x, F_x)$ nach (4.29) sich mit der Axiallast F_x signifikant ändern können, Abschnitt 4.1.2.

Viele Verfahren zur Reglerauslegung setzen eine zeitinvariante Regelstrecke voraus. Für die Regelung zeitlich veränderlicher Systeme, wie im vorliegenden Fall, gibt es v. a. zwei Ansätze, einerseits *robuste Regler*, andererseits *selbstanpassende* bzw. *adaptive Regler*, [40], [52]. Robuste Regler eignen sich vor allem für kleine Änderungen z. B. der Eigenkreisfrequenzen und Schwingungseigenformen, [52].

Adaptive Regler können sich nach einer Anpassungszeit an vergleichsweise große Änderungen z. B. der Eigenkreisfrequenzen und Schwingungseigenformen anpassen. Aufgrund der Kenntnis des Systemverhaltens mit großen Änderungen bis hin zum Vorzeichenwechsel der Eigenwerte des Systems, Abschnitt 5.1, wird für das aktive Balkensystem eine adaptive Regelung gewählt.

Die *gesteuerte Adaption* bzw. *parameter scheduling* ermöglicht bei Kenntnis des Systemverhaltens eine schnelle Anpassung der Regelung anhand einer festen Zuordnung, [52]. Am vorliegenden Balkensystem wird die Axiallast F_x gemessen, die eine Änderung des Systemverhaltens maßgeblich hervorruft. So ist es möglich, im Vorhinein für mehrere Axiallasten F_x je einen stabilisierenden Regler auszulegen. Entsprechend der wirkenden Axiallast F_x wird ein passender Regler zur Stabilisierung des axial belasteten Balkensystems aufgerufen. Damit kann auch ein Balkensystem mit asymmetrischen Lagerungsbedingungen stabilisiert werden, das axiallastabhängige Dehnungseigenformen besitzt, vgl. Abbildung 4.4.

Die Regelstrecke für das System in Abbildung 4.1 kann für einen Arbeitspunkt bei einer konstanten Axiallast F_x als linear und zeitinvariant angenommen werden. Zur Berechnung der aktiven Kraft $F_{z,a}(t)$, die gleichbedeutend mit der skalaren Eingangsgröße $u_1(t)$ ist, kommt eine **Zustandsrückführung** des modalen Zustandsvektors $\mathbf{q}(t)$ nach (4.34) zum Einsatz,

$$u_1(t) = F_{z,a}(t) = -\mathbf{K}(F_x)\mathbf{q}(t), \quad (5.7)$$

mit der noch unbekannten $[1 \times 6]$ Reglermatrix $\mathbf{K}(F_x)$. Diese wird im nächsten Absatz in Abhängigkeit von der Axiallast mittels Linear-Quadratischer Regelung (LQR) ausgelegt.

Abbildung 5.3 stellt die Struktur des Regelungssystems aus den Gleichungen der ZRD (4.32) und (4.33) und der Zustandsrückführung (5.7) dar. Darin ist das Systemverhalten der Regelstrecke im Zustandsvektor $\mathbf{q}(t)$ nach (4.34) über die Integration und die Systemmatrix $\mathbf{A}(F_x)$ nach (4.37) abgebildet. Die Ausgangsmatrix $\mathbf{C}(F_x)$ nach (4.39) wandelt die modalen Auslenkungen $\mathbf{q}(t)$ in Dehnungen $\mathbf{y}(t)$ nach (4.36) an den Messstellen $x_{s,1-3}$ um. Der Zustand $\mathbf{q}(t)$ wird über die Reglermatrix $\mathbf{K}(F_x)$ in die Eingangsgröße aktive Kraft $u_1(t) = F_{z,a}(t)$ nach (5.7) gewandelt, die über die Eingangsmatrix $\mathbf{B}(F_x)$ nach (4.38) auf die zeitliche Ableitung des Zustandsvektors $\dot{\mathbf{q}}(t)$ addiert wird und das System stabilisiert. Als weitere Eingangsgröße wirkt die Störkraft $u_2(t) = F_{z,d}(t)$ auf die Eingangsmatrix $\mathbf{B}(F_x)$ und kann das Balkensystem destabilisieren.

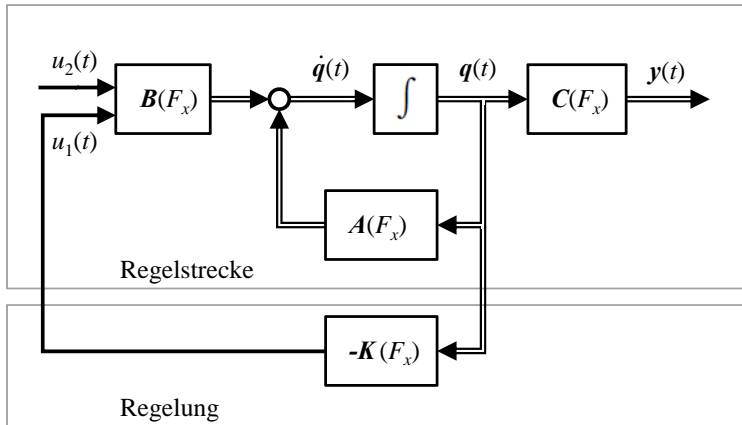


Abbildung 5.3: Regelkreis des Zustandsraummodells mit axiallastabhängiger Rückführung $\mathbf{K}(F_x)$

Es handelt sich also um einen Zustandsrückführung, d.h. einen Feedback-Regler, die Reglermatrizen der Zustandsrückführung werden jedoch über eine Feedforward-Steuerung an die wirkende Axiallast angepasst. Der Ansatz der gesteuerten Adaption ist bekannt, wurde bisher jedoch in keiner der gefundenen Arbeiten im Stand der Forschung für die aktive Stabilisierung verwendet.

Auslegung eines stabilisierenden Reglers

Ziel des folgenden Abschnitts ist die Bestimmung einer axiallastabhängigen Reglermatrix $\mathbf{K}(F_x)$, die das axial unter- und überkritisch belastete Balkensystem in Abbildung 4.1 stabilisiert. Einen strukturierten Ansatz zur Ermittlung von $\mathbf{K}(F_x)$, in dem die Regel- und Stellgrößen individuell bewertet werden können, bietet die

Linear-Quadratische Regelung (LQR), [40]. Dafür wird zunächst analytisch das quadratische Gütefunktional

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{q}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{q}(t) + u_1(t)^T R u_1(t) dt, \quad (5.8)$$

für die Regel- und Stellgrößen des linearen Systems aufgestellt, [40].

Die $[6 \times 6]$ Gewichtungsmatrix \mathbf{Q} des $[6 \times 1]$ Zustandsvektors $\mathbf{q}(t)$ und der skalare Gewichtungsfaktor R der skalaren Eingangsgröße $u_1(t) = F_{z,a}(t)$ werden wie folgt definiert

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{m}^2}, \quad R = 1 \frac{1}{\text{N}^2}. \quad (5.9)$$

Für die Auslegung relevant sind nicht die absoluten Werte, sondern das Verhältnis zwischen den Einträgen von \mathbf{Q} und R . Der Gewichtungsfaktor $R = 1$ ist ein Skalar, da nur die Eingangsgröße aktive Kraft $u_1(t) = F_{z,a}(t)$ und nicht die skalare Störkraft $u_2(t) = F_{z,d}(t)$ im $[2 \times 1]$ Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$ nach (4.35) geregelt wird. \mathbf{Q} nimmt für Systeme mit nur einer Eingangsgröße Diagonalform an, [40].

Das Produkt aus Q_{22} und der modalen Auslenkung der ersten Schwingungsform $q_1(t)$ aus (4.34) ergibt den größten Anteil des Gütefunktionals J gefolgt vom Produkt aus Q_{44} und $q_2(t)$ und dem Produkt aus Q_{66} und $q_3(t)$.

Die $[1 \times 6]$ Reglermatrix $\mathbf{K}_{\text{LQR}}(F_x)$ der Zustandsrückführung ergibt sich schließlich aus dem Optimierungsproblem, anhand der vorgegebenen Gewichtungsmatrizen und Zustandsraummatrizen das Minimum des Gütefunktionals J zu bilden. Die Reglermatrix kann angegeben werden als

$$\mathbf{K}_{\text{LQR}}(F_x) = R^{-1} \mathbf{B}(F_x)^T \mathbf{P}, \quad (5.10)$$

[49]. Darin sind der skalare Gewichtungsfaktor $R^{-1} = R = 1$, die $[1 \times 6]$ Transponierte $\mathbf{B}(F_x)^T$ der ersten Spalte der Eingangsmatrix $\mathbf{B}(F_x)$ nach (4.38) aus der ZRD des Balkensystems und die $[6 \times 6]$ Hilfsmatrix \mathbf{P} aus der Lösung der algebraischen Matrix-Riccatigleichung

$$\mathbf{A}(F_x)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}(F_x) - \mathbf{P} \mathbf{B}(F_x) R^{-1} \mathbf{B}(F_x)^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}, \quad (5.11)$$

[1]. Darin sind $\mathbf{A}(F_x)$ und $\mathbf{B}(F_x)$ aus (4.32) sowie \mathbf{Q} und R aus (5.9), [49], [57]. Das LQR-Vorgehen ermittelt aus diesen vier zuvor genannten Matrizen anhand der Gleichungen (5.8) bis (5.11) die Reglermatrix $\mathbf{K}_{\text{LQR}}(F_x)$ und ist im MATLAB-Befehl `lqr` implementiert. Für eine ausführliche Herleitung der Gleichungen sei auf [40] und [49] verwiesen.

5.4 Stabilität des aktiven Balkensystems

Ist der Regler entworfen, kann die Stabilität des geschlossenen Regelkreises bewertet werden. Dafür werden wie in Abschnitt 5.1 die Eigenwertpaare der ersten drei Schwingungseigenformen der Systemmatrix $A(F_x)$ nach (4.37) betrachtet, ergänzt um die Rückführung $K_{\text{LQR}}(F_x)$ nach (5.10). Für das aktive System $(\mathbb{A})_a$ liefert

$$\det(A(F_x) - B(F_x)K_{\text{LQR}}(F_x) - \lambda_a I) = 0 \quad (5.12)$$

die Eigenwerte $\lambda_{a,2n-1/2n}$. Abbildung 5.4 zeigt die ersten drei Eigenwertpaare des passiven (\times) und des aktiv stabilisierten Balkensystems (\times) allerdings nur mit Axiallast $F_{x,\text{ue}}$, vgl. Abbildung 5.1. Eigenwerte für das passive und aktive Balkensystem mit Axiallasten $F_{x,\text{un}}$ und $F_{x,\text{cr}}$ werden der Übersichtlichkeit halber in Abbildung 5.4 nicht aufgeführt, da sie kein instabiles Verhalten aufweisen.

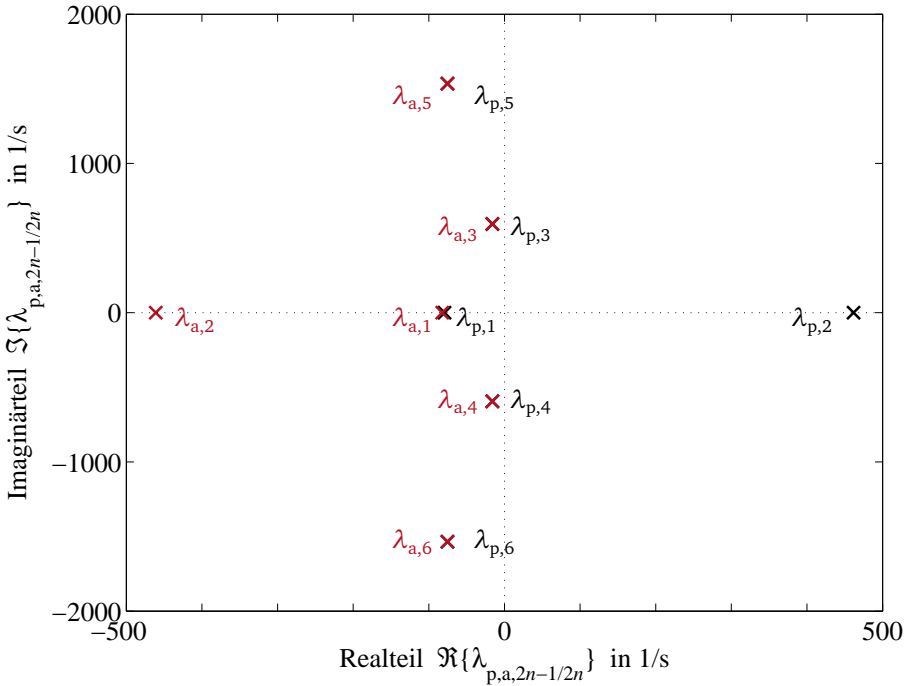


Abbildung 5.4: Eigenwerte $\lambda_{p,2n-1/2n}$ in der komplexen Ebene für passives Balkensystem (\times), meist überdeckt sowie $\lambda_{a,2n-1/2n}$ für aktiv stabilisiertes Balkensystem (\times) nur mit $F_{x,\text{ue}}$ für $n = 1$ bis 3

Für die überkritische Axiallast $F_{x,ue}$ nimmt das Eigenwertpaar $\lambda_{p,1/2}$ im passiven Fall einen positiven und einen negativen Realteil an (\times), d. h. die zugehörige erste Schwingungseigenform weist instabiles Verhalten auf. Die aktive Stabilisierung verschiebt den Eigenwert $\lambda_{p,2}$ zu $\lambda_{a,2}$, so dass beide Eigenwerte $\lambda_{a,1/2}$ einen negativen Realteil besitzen (\times). Für $F_{x,ue}$ ist das aktive Balkensystem nun stabil.

Für $F_{x,ue}$ besitzen die Eigenwertpaare $\lambda_{a,3/4}$ und $\lambda_{a,5/6}$, die zur zweiten und dritten Schwingungseigenform gehören, einen negativen Realteil und führen somit zu einem asymptotisch stabilen Verhalten. Da die Regelung insbesondere die erste instabile Schwingungseigenform beeinflusst und die zweite und dritte Schwingungseigenform nach (5.9) schwächer gewichtet sind, überdecken sich deren Eigenwertpaare für das passive (\times) und für das aktiv stabilisierte System (\times), Abbildung 5.4.

Diese Betrachtung berücksichtigt nur die theoretische Machbarkeit, ohne Begrenzung der aktiven Kraft oder der maximalen Auslenkung des Balkens und ohne Berücksichtigung von Störungen. Diese Effekte sollen im Zeitbereich numerisch simuliert werden. Die Implementierung der Regelung im Zeitbereich wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

5.5 Implementierung der Regelung im Zeitbereich

Die Regelung im Zeitbereich wird über das geregelte Zustandsraummodell in Abbildung 5.5 mit der Software MATLAB/SIMULINK® numerisch simuliert. Die Kombination aus Feedforward-Steuerung und Feedback-Regelung wurde in keiner der gefundenen Arbeiten im Stand der Forschung für die aktive Stabilisierung gegen Knicken implementiert und bietet den Vorteil, dass auch ein Balkensystem mit axiallastabhängigen Dehnungseigenformen stabilisiert werden kann. Abbildung 5.5 stellt graphisch den Signalfluss für die Zeitbereichssimulation dar. Zusätzlich zu dem Modell in Abbildung 5.3 wird eine Tiefpassfilterung vor und nach der modalen Regelung berücksichtigt, wie sie auch im Experiment analog umgesetzt wird.

Die Regelstrecke in Abbildung 5.5 ist identisch aufgebaut wie in Abbildung 5.3, jedoch werden statt des Zustands $\mathbf{q}(t)$ nach (4.34) die Dehnungssignale $\mathbf{y}(t)$ nach (4.36) erfasst und tiefpassgefiltert. Die Tiefpassfilterung mindert im Experiment den Einfluss des Messrauschens in den Dehnungssignalen und der Frequenzanteile oberhalb der dritten Eigenkreisfrequenz auf die Regelung, den Aliasing-Effekt, [40]. Nach dem Abtasttheorem von SHANNON muss die Abtastkreisfrequenz ω_A mindestens doppelt so groß sein wie die maximale Signalkreisfrequenz ω_S ,

$$\omega_A > 2\omega_S, \quad (5.13)$$

um Scheinresonanzen zu vermeiden, die Aliasing-Frequenzen, [40].

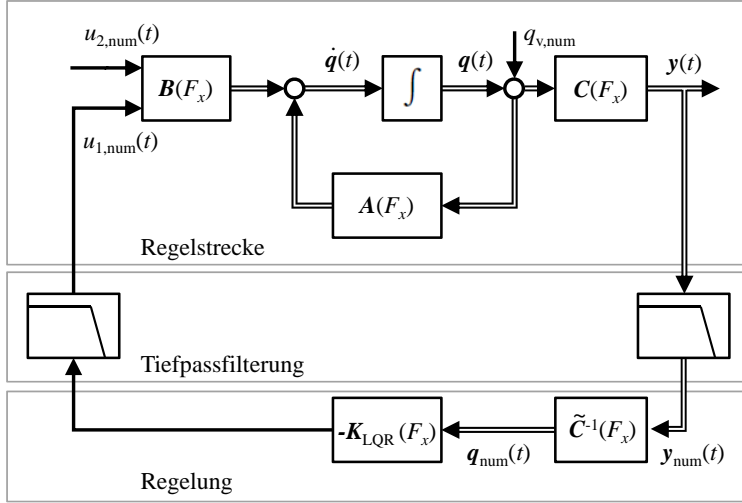


Abbildung 5.5: Regelkreis des Zustandsraummodells mit axiallastabhängiger Rückführung $K_{\text{LQR}}(F_x)$ der modalen Zustandsgrößen und mit Tiefpassfilterung

Im Folgenden werden u. a. gefilterte Signale wie die Dehnung $y_{\text{num}}(t)$ entsprechend nach (4.36) oder Zustandsvektor $\mathbf{q}_{\text{num}}(t)$ nach (4.34) in der numerischen Simulation mit dem Index $_{\text{num}}$ gekennzeichnet.

Nach der Tiefpassfilterung wird der Vektor der gefilterten Dehnungssignale $y_{\text{num}}(t)$ mit Hilfe der Inversen $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}(F_x)$ der reduzierten Ausgangsmatrix $\tilde{\mathbf{C}}(F_x)$ in modale Auslenkungen umgerechnet,

$$\begin{bmatrix} q_{1,\text{num}}(t) \\ q_{2,\text{num}}(t) \\ q_{3,\text{num}}(t) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1}(F_x) \mathbf{y}_{\text{num}}(t) \quad \text{mit} \quad (5.14)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}(F_x) = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \Phi_1''(x_{s,1}, F_x) & \Phi_2''(x_{s,1}, F_x) & \Phi_3''(x_{s,1}, F_x) \\ \Phi_1''(x_{s,2}, F_x) & \Phi_2''(x_{s,2}, F_x) & \Phi_3''(x_{s,2}, F_x) \\ \Phi_1''(x_{s,3}, F_x) & \Phi_2''(x_{s,3}, F_x) & \Phi_3''(x_{s,3}, F_x) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Die modalen Auslenkungen $q_{n,\text{num}}(t)$ werden numerisch nach der Zeit abgeleitet, um die modalen Geschwindigkeiten $\dot{q}_{n,\text{num}}(t)$ zu erhalten und den Zustandsvektor

$$\mathbf{q}_{\text{num}}(t) = [\dot{q}_{1,\text{num}}(t), q_{1,\text{num}}(t), \dot{q}_{2,\text{num}}(t), q_{2,\text{num}}(t), \dot{q}_{3,\text{num}}(t), q_{3,\text{num}}(t)]^T \quad (5.16)$$

aufzustellen. Dieser dient als Eingangsgröße für die Reglermatrix $K_{\text{LQR}}(F_x)$ und liefert die skalare aktive Kraft

$$u_{1,\text{num}}(t) = F_{z,a,\text{num}}(t) = -K_{\text{LQR}}(F_x) \mathbf{q}_{\text{num}}(t). \quad (5.17)$$

Das Signal der aktiven Kraft wird nochmals tiefpassgefiltert, um die Verstärkung der Rauschanteile durch numerisches Differenzieren der Dehnungssignale zu unterdrücken und führt wie in Abbildung 5.3 auf die Eingangsmatrix $B(F_x)$ nach (4.38).

Festlegung der Abtastrate

Das Zeitintervall zwischen zwei Abtastschritten wird mit der Abtastzeit T_A beschrieben, die mit der Abtastkreisfrequenz wie folgt zusammenhängt,

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}. \quad (5.18)$$

Der transiente Vorgang des Knickens weist in einem Zeitraum von 10 ms bis 30 ms bereits endliche modale Auslenkungen $q_1(t) > 0,003 \text{ m}$ auf. Daher ist für die Erfassung des Knickvorgangs eine Abtastrate notwendig, die deutlich über der Mindest-Abtastrate nach SHANNON liegt, Gleichung (5.13). Dimensionierend für die Erfassung des Knickvorgangs ist die Abtastzeit

$$T_A = 50 \mu\text{s}, \quad (5.19)$$

die aus Erfahrungswerten aus den Experimenten in Kapitel 6 gewählt wird, um Zeitverzögerungen infolge der Abtastung zu minimieren.

Auslegung der Tiefpassfilterung

Für die Auslegung der Tiefpassfilterung wird das Übertragungsverhalten des Tiefpassfilters im Frequenzbereich festgelegt. Charakteristische Größen für die Auslegung des Tiefpassfilters sind seine konstante Eckkreisfrequenz ω_e , oberhalb derer ein Signal gemindert wird sowie seine Flankensteilheit, die das Übertragungsverhalten oberhalb der Eckkreisfrequenz beschreibt.

Für die Regelung wird ein elliptischer Tiefpassfilter 6. Ordnung mit einer Flankensteilheit von -52 dB/Dekade ausgelegt, der auch bei der experimentellen Erprobung in Kapitel 6 verwendet wird. Der Tiefpassfilter zeichnet sich durch geringes Überspringen und eine größere Flankensteilheit aus als z. B. ein Butterworth-Tiefpassfilter 8. Ordnung mit -48 dB/Dekade , [37].

Die Eckkreisfrequenz wird einmalig festgelegt und so ausgewählt, dass die Dehnungssignale bis zur 3. Eigenkreisfrequenz ω_3 des Balkensystems für die betrachteten Axiallasten von $F_{x,\text{un}} = 23,5 \text{ N}$ bis $F_{x,\text{ue}} = 41,5 \text{ N}$, Tabelle 5.1, den Filter möglichst ungemindert passieren.

Die Eckkreisfrequenz der Tiefpassfilterung der Eingangssignale soll zwischen der höchsten 3. Eigenkreisfrequenz des Balkens für $F_{x,\text{un}}$ und der niedrigsten 4. Eigenkreisfrequenz für $F_{x,\text{ue}}$ liegen. Tabelle 5.2 zeigt die ersten vier Eigenkreisfrequenzen für den unterkritisch und den überkritisch belasteten Balken. Für die überkritische Axiallast $F_{x,\text{ue}} = 41,5 \text{ N}$ wird der Realteil der ersten Eigenkreisfrequenz $\Re\{\omega_1\} = 0$ sowie der Imaginärteil $\Im\{\omega_1\} > 0$ und steigt mit zunehmender Axiallast an, wie in Abbildung 4.2 angedeutet.

Tabelle 5.2: Erste vier Eigenkreisfrequenzen des axial belasteten Balkens

	$F_{x,\text{un}} = 23,5 \text{ N}$	$F_{x,\text{ue}} = 41,5 \text{ N}$
ω_1 in 1/s	91,0	191,6i
ω_2 in 1/s	691,3	567,2
ω_3 in 1/s	1 592,1	1 479,4
ω_4 in 1/s	2 819,0	2 706,8

Die Eckkreisfrequenz des Tiefpassfilters für die Eingangssignale beträgt

$$1,2 \cdot \omega_3(F_{x,\text{un}}) < \omega_e = 1900 \text{ 1/s} < 1,4 \cdot \omega_4(F_{x,\text{ue}}). \quad (5.20)$$

Die Ausgangssignale der Regelung werden mit einer Eckkreisfrequenz von $\omega_e \approx 31400 \text{ 1/s}$ tiefpassgefiltert, um die Zeitverzögerung infolge der Filterung gering zu halten.

5.6 Mechanisches Verhalten des passiven und aktiven Balkensystems

Dieser Abschnitt stellt das mechanische Auslenkungs-Verhalten des passiven und aktiven Balkensystems in Abbildung 4.1 in numerischen Simulationen aus der Wirkung einer lateralen Störkraft und einer lateralen Vorauslenkung des Balkens vor.

Alle nachfolgenden numerischen Simulationen sind mit dem Zustandsraummodell aus Kapitel 4 durchgeführt, das mit den experimentell ermittelten modalen Größen aus der Modellanpassung in Abschnitt 6.4 abgeglichen ist.

Vorauslenkung

Die Form der Vorauslenkung entspricht der ersten Schwingungseigenform $\Phi_1(x, F_x)$ für $n = 1$ gemäß (4.29) des axial belasteten Balkensystems. Sie hat im Vergleich zu einer Vorauslenkung in der Form höherer Schwingungseigenformen die größte Auswirkung auf das Knicken, das stets in der angenommenen ersten Schwingungseigenform des axial belasteten Balkensystems auftritt. Für die Abschätzung einer plausiblen Vorauslenkung können Toleranzen zur Herstellung eines Balkens mit Länge $l = 0,3 \text{ m}$ nach Abbildung 4.1 für das aktive Balkensystem nach DIN ISO 2768-2 herangezogen werden. Danach kann es zu einer Abweichung der Geradheit um $q_v = 0,0004 \text{ m}$ aufgrund von Fertigungsungenauigkeiten nach der werkstattüblichen Toleranzklasse K kommen, [13]. Dieser Wert gilt für den axial unbelasteten Balken mit $F_{x,0} = 0 \text{ N}$.

Zur Modellierung der angenommenen statischen Vorauslenkung wird im Zustandsraummodell zu dem Zustand $q_1(t)$ im Zustandsvektor $\mathbf{q}(t)$ nach (4.34) ein zeitlich nicht veränderlicher Wert $q_{v,\text{num}}$ addiert, Abbildung 5.5. Das entspricht einer Vorauslenkung des Balkensystems in der ersten Eigenform um den Betrag $q_{v,\text{num}}$ im unbelasteten Fall. Eine Vergrößerung der Vorauslenkung mit zunehmender axialer Drucklast F_x kann auf diese Weise berücksichtigt werden.

Störkraft

Die laterale Störkraft ist eine als zeitabhängige Kraft $F_{z,d,\text{num}}(t)$ an der Stelle x_d , Abbildung 4.1. Sie wirkt an einer Stelle, an der der Balken insbesondere dann in der ersten Schwingungseigenform ausgelenkt wird. Knicken tritt für überkritische Axiallasten wie $F_{x,\text{ue}}$ als Auslenkung gemäß der ersten Schwingungseigenform $\Phi_1(x, F_x)$ des axial belasteten Balkens auf.

Der zeitliche Verlauf der Störkraft ist theoretisch impulsförmig mit unendlich vielen Frequenzanteilen, um neben der ersten kritischen auch die nächst höheren Schwingungseigenformen des Balkensystems anzuregen.

Die Störkraft wird jedoch nicht als idealer Dirac-Impuls modelliert, da dies zu Singularitäten beim numerischen Differenzieren führen kann. Stattdessen wird der Kraftverlauf durch eine schmale Cosinus-Halbwellen approximiert,

$$u_{2,\text{num}}(t) = F_{z,d,\text{num}}(t) = \frac{\hat{F}_{z,d}}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_d} t\right) \right) \quad (5.21)$$

für $t = 0 \text{ s}$ bis T_d . In Abbildung 5.6 ist der Störkraftverlauf für $F_{z,d15} = 0,15 \text{ N}$ mit Index 15 gezeigt.

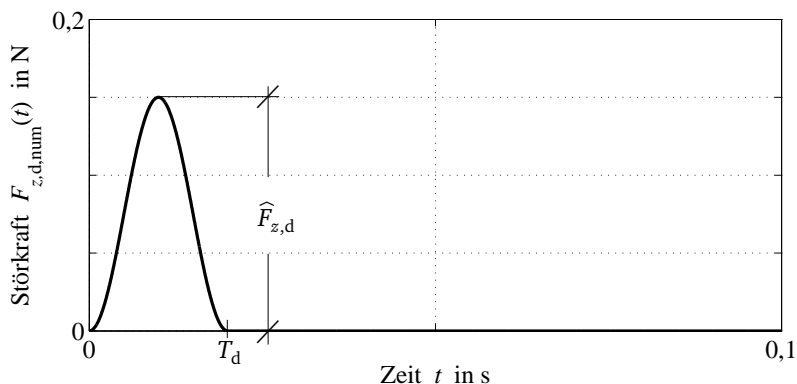


Abbildung 5.6: Störkraft $F_{z,d,num}(t)$

$F_{z,d,num}$ ist gemäß Abbildung 5.3 und Abbildung 5.5 die zweite Eingangsgröße $u_{2,num}(t)$ des Regelkreises. Die Dauer eines Impulses wird aus eigenen experimentellen Erfahrungswerten mit $T_d = 0,02\text{ s}$ angenommen. Der maximale Betrag des Kraftverlaufs der Störkraft $\hat{F}_{z,d}$ wird im Folgenden als $F_{z,d}$ bezeichnet.

Neben der Störkraft $F_{z,d15}$ führen die höhere zweite Störkraft $F_{z,d36} = 0,36\text{ N}$ mit Index $\boxed{36}$ und dritte Störkraft $F_{z,d54} = 0,54\text{ N}$ mit Index $\boxed{54}$ zu einer größeren Störung, deren Wirkung auf das passive und aktive Knickverhalten untersucht wird. Die Störkräfte $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ sind aus experimentellen Voruntersuchungen ermittelt, Tabelle 6.2. Der Index $\boxed{0}$ beschreibt $F_{z,d0} = 0\text{ N}$.

Übersicht der numerisch untersuchten Fälle

Tabelle 5.3 fasst die Kurzschreibweise der betrachteten axialen und lateralen Lastfälle zusammen, die am experimentellen Balkensystem tatsächlich auftreten.

Tabelle 5.3: Bezeichnung der numerisch simulierten Lastfälle

Axiallast	Störkraft	Vorauslenkung	Regelung
$F_{x,un} = 23,5\text{ N}$ $F_{x,cr} = 27,8\text{ N}$ $F_{x,ue} = 41,5\text{ N}$	$F_{z,d0} = 0\text{ N}$ $F_{z,d15} = 0,15\text{ N}$ $F_{z,d36} = 0,36\text{ N}$ $F_{z,d54} = 0,54\text{ N}$	$q_{v,num} = 0,0004\text{ m}$	passiv \boxed{p} , $F_{z,a} = 0\text{ N}$ aktiv \boxed{a} , $F_{z,a} \neq 0\text{ N}$

Tabelle 5.4 zeigt die numerisch simulierten Kombinationen aus Axiallast F_x , Störkräften $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ sowie Vorauslenkung $q_{v,num}$ sowohl des passiven als auch des aktiv stabilisierten Balkensystems, Fälle A1, A2 und A3 und jeweilige Unterteilung in a bis d und e bis h.

Tabelle 5.4: Numerisch simulierte Fälle in Abbildungen 5.7 bis 5.11 für Balkensystem mit Vorauslenkung und Störkraft

Fall	Axiallast F_x passiv/aktiv	Störkraft				Vorauslen- kung $q_{v,num}$	aktive Kraft $F_{z,a}$ in N
		$F_{z,d0}$	$F_{z,d15}$	$F_{z,d36}$	$F_{z,d54}$		
A1a-d	$F_{x,un,p}$	—	—	—	—	$q_{v,num}$	0
A1e-h	$F_{x,un,a}$	—	—	—	—	$q_{v,num}$	$\neq 0$
A2a-d	$F_{x,cr,p}$	—	—	—	—	$q_{v,num}$	0
A2e-h	$F_{x,cr,a}$	—	—	—	—	$q_{v,num}$	$\neq 0$
A3a-d	$F_{x,ue,p}$	—	—	—	—	$q_{v,num}$	0
A3e-h	$F_{x,ue,a}$	—	—	—	—	$q_{v,num}$	$\neq 0$

Fall A1 untersucht den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ und Vorauslenkung $q_{v,num}$ bei **unterkritischer Axiallast** $F_{x,un}$ auf die erste modale Auslenkung $q_{1,num}(t)$ nach (5.16) und auf die Stabilität des passiven (p) für a bis d und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems für e bis h, Abbildungen 5.7 bis 5.9.

Fall A2 untersucht den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ und Vorauslenkung $q_{v,num}$ bei **kritischer Knicklast** $F_{x,cr}$ auf die erste modale Auslenkung $q_{1,num}(t)$ und auf die Stabilität des passiven (p) für a bis d und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems für e bis h, Abbildung 5.10.

Fall A3 untersucht den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ und Vorauslenkung $q_{v,num}$ bei **überkritischer Axiallast** $F_{x,ue}$ auf die erste modale Auslenkung $q_{1,num}(t)$ und auf die Stabilität des passiven (p) für a bis d und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems für e bis h, Abbildung 5.11.

Numerische Ergebnisse: Fall A1

Abbildung 5.7 zeigt den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ und Vorauslenkung $q_{v,num}$ bei **unterkritischer Axiallast** $F_{x,un}$ auf die erste modale Auslenkung $q_{1,num}(t)$ nach (5.16) und auf die Stabilität des passiven (p) und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems.

Die Verformung $w(x, t)$ an jeder Stelle des Balkens kann mittels Gleichung (3.1) bzw. Gleichung (3.2) errechnet werden. Im Folgenden wird der Anschaulichkeit halber nur die modale Auslenkung $q_{1,num}$ der ersten für das Knicken kritischen Schwingungseigenform gezeigt. Bis zu der modalen Auslenkung $q_{1,num} = 0,003 \text{ m}$ kann das experimentelle aktive Balkensystem im folgenden Kapitel 6 noch stabilisiert werden, bei größeren modalen Auslenkungen knickt es in allen Fällen aus.

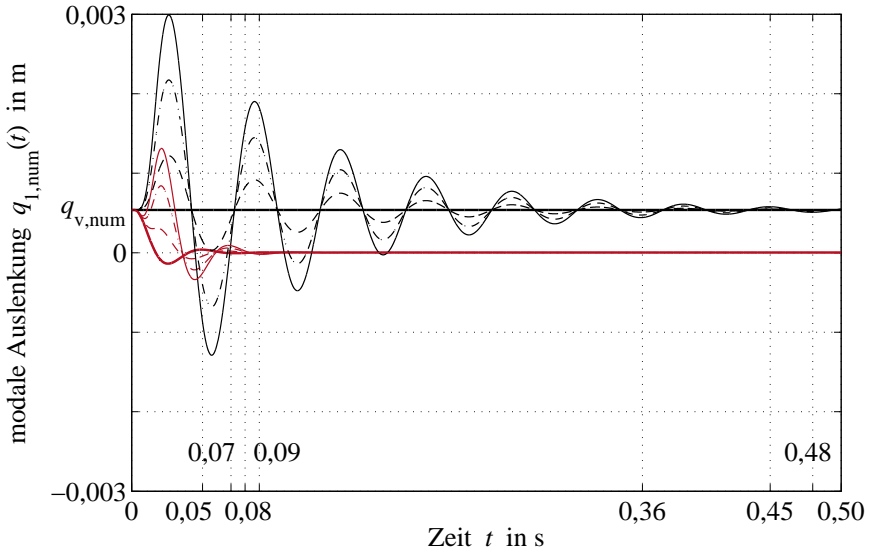


Abbildung 5.7: Fall A1, Zeitverläufe der ersten modalen Auslenkung $q_{1,num}(t)$:

- a) $F_{x,un,p}, F_{z,d0}, q_{v,num}$ (—), e) $F_{x,un,a}, F_{z,d0}, q_{v,num}$ (—),
- b) $F_{x,un,p}, F_{z,d15}, q_{v,num}$ (— —), f) $F_{x,un,a}, F_{z,d15}, q_{v,num}$ (— —),
- c) $F_{x,un,p}, F_{z,d36}, q_{v,num}$ (— · —), g) $F_{x,un,a}, F_{z,d36}, q_{v,num}$ (— · —),
- d) $F_{x,un,p}, F_{z,d54}, q_{v,num}$ (— — —), h) $F_{x,un,a}, F_{z,d54}, q_{v,num}$ (— — —)

Das **passive Balkensystem** ist unterkritisch mit $F_{x,un,p}$ belastet ohne aktive Kraft $F_{z,a} = 0\text{ N}$. Infolge der Axiallast $F_{x,un,p}$ vergrößert sich die Vorauslenkung $q_{v,num}$ auf $q_{v,num} = 0,000550\text{ m}$. Ohne Störung $F_{z,d0} = 0\text{ N}$ ist der Balken in Ruhe, d. h. er schwingt nicht und knickt nicht, Fall A1a. Wirkt auf das passive Balkensystem mit $F_{x,un,p}$ die Störkraft $F_{z,d15} = 0,15\text{ N}$, so wird der Balken zu Schwingungen mit $\omega_1(F_{x,un})$ angeregt, die aufgrund schwacher Dämpfung asymptotisch abklingen, Fall A1b. Der Balken gilt als schwingungsberuhigt, wenn seine Schwingungsamplituden den Schwellenwert von 1% der o. g. modalen Auslenkung $q_{1,num} = 0,003\text{ m}$ unterschreiten. Nach der Abklingzeit $t_a = 0,36\text{ s}$ gilt der Balken als schwingungsberuhigt, Fall A1b.

Wirken auf das passive Balkensystem mit $F_{x,un,p}$ die Störkräfte $F_{z,d36} = 0,36\text{ N}$ und $F_{z,d54} = 0,54\text{ N}$, so wird der Balken ebenfalls zu Schwingungen mit $\omega_1(F_{x,un})$ angeregt, die aufgrund schwacher Dämpfung asymptotisch abklingen, Fall A1c und A1d. Die Schwingungsamplituden sind linear proportional zur Störkraft $F_{z,d}$ und größer als in Fall A1b. Nach $t_a = 0,45\text{ s}$ und $t_a = 0,48\text{ s}$ gilt der Balken als schwingungsberuhigt, nach dem gleichen Kriterium wie im vorigen Absatz, Abbildung 5.7.

Das **aktive Balkensystem** mit $F_{x,\text{un},a}$ ist stabil und wird in die Ruhelage mit modaler Auslenkung $q_{1,\text{num}}(t) \rightarrow 0$ geregelt, die kleiner als die Vorauslenkung des unbelasteten Balkensystems $q_{v,\text{num}}$ ist. Ohne Störkraft $F_{z,d0} = 0 \text{ N}$ wird der Balken nach $t_a = 0,05 \text{ s}$ in die Ruhelage geregelt, Fall A1e, Abbildung 5.7. Das Balkensystem erreicht die Ruhelage abhängig von der Störkraft für $F_{z,d15}$ in $t_a = 0,07 \text{ s}$, Fall A1f, für $F_{z,d36}$ in $t_a = 0,08 \text{ s}$, Fall A1g und für $F_{z,d54}$ in $t_a = 0,09 \text{ s}$, Fall A1h, Abbildung 5.7.

Für das aktive Balkensystem zeigt Abbildung 5.8 die Verläufe der aktiven Kraft $F_{a,\text{num}}(t)$, um den Balken in die Ruhelage zu regeln. Der maximale Betrag $\max|F_{z,a,\text{num}}|$ der Verläufe in Abbildung 5.8 ist im Folgenden vereinfacht geschrieben als $F_{z,a}$. Für die passiven Fälle A1a, A1b, A1c und A1d ist $F_{z,a} = 0 \text{ N}$, überdeckt in Abbildung 5.8. Für die aktiven Fälle ergeben sich $F_{z,a} = 9,6 \text{ N}$ für Fall A1e, $F_{z,a} = 14,5 \text{ N}$ für Fall A1f, $F_{z,a} = 31,6 \text{ N}$ für Fall A1g und $F_{z,a} = 46,3 \text{ N}$ für Fall A1h. Zur Kompensation der Vorauslenkung $q_{v,\text{num}}$ bleibt eine laterale aktive Kraft $F_{z,a}(t > 0,1 \text{ s}) = 5,0 \text{ N}$ als Offset bestehen, Abbildung 5.8.

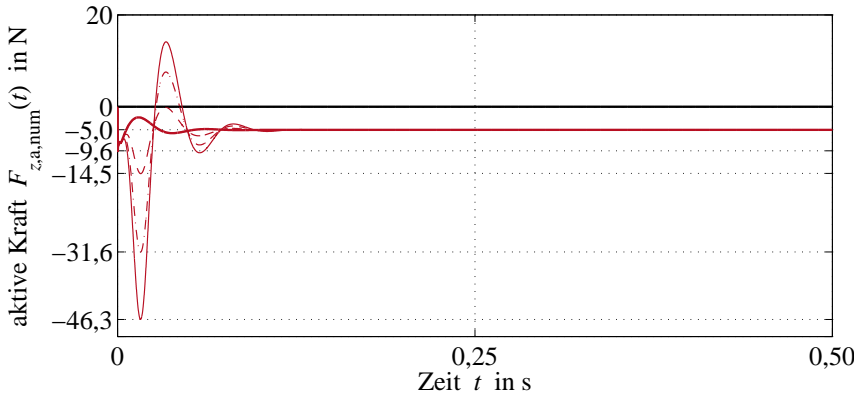


Abbildung 5.8: Fall A1, Zeitverläufe der aktiven Kraft $F_{a,\text{num}}(t)$:

- a) $F_{x,\text{un},p}$, $F_{z,d0}$, $q_{v,\text{num}}$ (—), e) $F_{x,\text{un},a}$, $F_{z,d0}$, $q_{v,\text{num}}$ (—),
- b) $F_{x,\text{un},p}$, $F_{z,d15}$, $q_{v,\text{num}}$ (—), f) $F_{x,\text{un},a}$, $F_{z,d15}$, $q_{v,\text{num}}$ (—),
- c) $F_{x,\text{un},p}$, $F_{z,d36}$, $q_{v,\text{num}}$ (—), g) $F_{x,\text{un},a}$, $F_{z,d36}$, $q_{v,\text{num}}$ (—),
- d) $F_{x,\text{un},p}$, $F_{z,d54}$, $q_{v,\text{num}}$ (—), h) $F_{x,\text{un},a}$, $F_{z,d54}$, $q_{v,\text{num}}$ (—)

Eine weitere Darstellungsform zur Fallunterscheidung ist das Phasenportrait, in dem die modale Geschwindigkeit $\dot{q}_{1,\text{num}}(t)$ der ersten Schwingungseigenform über der modalen Auslenkung $q_{1,\text{num}}(t)$ nach (5.16) aufgetragen ist. Mit Hilfe dieser Darstellung kann die Stabilität des Systems bewertet werden.

Die Zeitverläufe der modalen Auslenkungen $q_{1,num}(t)$ Abbildung 5.7 sind in Abbildung 5.9 in Phasenportraits den modalen Geschwindigkeiten $\dot{q}_{1,num}(t)$ gegenübergestellt.

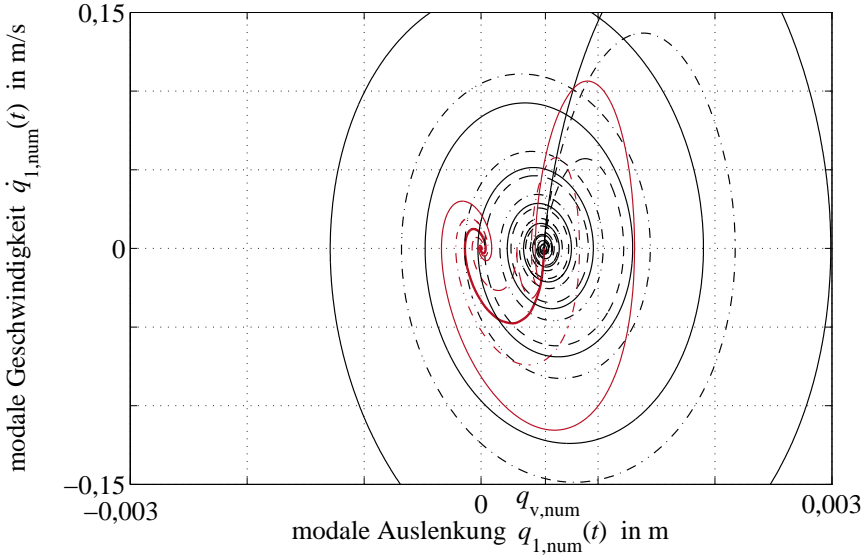


Abbildung 5.9: Fall A1, Phasenportraits $\dot{q}_{1,num}(t)$ über $q_{1,num}(t)$:

- a) $F_{x,un,p}, F_{z,d0}, q_{v,num}$ (—), e) $F_{x,un,a}, F_{z,d0}, q_{v,num}$ (—),
- b) $F_{x,un,p}, F_{z,d15}, q_{v,num}$ (— —), f) $F_{x,un,a}, F_{z,d15}, q_{v,num}$ (— —),
- c) $F_{x,un,p}, F_{z,d36}, q_{v,num}$ (— · —), g) $F_{x,un,a}, F_{z,d36}, q_{v,num}$ (— · —),
- d) $F_{x,un,p}, F_{z,d54}, q_{v,num}$ (— · —), h) $F_{x,un,a}, F_{z,d54}, q_{v,num}$ (— · —)

Der Fall A1a ist als Punkt bei $q_{v,num}$ und $\dot{q}_{1,num} = 0$ in Abbildung 5.9 dargestellt und wird von den anderen Verläufen verdeckt.

In den weiteren passiven Fällen A1b, A1c und A1d sind die Auslenkung und Geschwindigkeit des passiven Balkensystems als zusammenlaufende Spirale darstellt. Die Spirale wird immer enger mit fortschreitender Zeit, da die Auslenkungs- und Geschwindigkeitsamplitude der gedämpften Schwingung $q_{1,num}$ und $\dot{q}_{1,num}$ mit der Zeit abnehmen. Eine zusammenlaufende Spirale beschreibt stabiles Systemverhalten im Phasenportrait. Mit zunehmender Störkraft $F_{z,d}$ ist die Spirale weiter und der Balken braucht mehr Zeit, um in die vorausgelenkte Ruhelage $q_{v,num}$ zurückzukehren, Abbildung 5.9.

Im Phasenportrait ist für das aktive Balkensystem mit $F_{x,un,a}$ in Fall A1e der Verlauf zum Ursprung $q_{1,num} = 0$ ebenfalls als zusammenlaufende Spirale dargestellt.

Die Fälle A1f, A1g und A1h verhalten sich analog zu A1b, A1c und A1d und laufen schließlich zusammen mit linear proportional zur Störkraft $F_{z,d}$ vergrößerten Schwingungsamplituden, Abbildung 5.9.

Für die folgenden Fälle A2 und A3 nach Tabelle 5.4 wird nur noch die Darstellung der Zeitverläufe der modalen Auslenkung $q_{1,num}$ und der Phasenportraits für $\dot{q}_{1,num}(t)$ vs. $q_{1,num}(t)$ verwendet, um das Stabilitätsverhalten des passiven und aktiven Balkensystems für die definierten Lastfälle zu vergleichen. In allen folgenden numerischen Simulationen werden nur die Maximalwerte der aktiven Kraft $F_{z,a}$ genannt, jedoch kein Zeitverlauf mehr wie in Abbildung 5.8 gezeigt.

Tabelle 5.5 fasst die Ergebnisse zur Stabilität des Balkensystems, zur aktiven Kraft $F_{z,a}$ und zur Abklingzeit t_a in den Fällen A1a bis A1h zusammen.

Tabelle 5.5: Numerische Ergebnisse Fall A1

Fall	A1a	A1b	A1c	A1d	A1e	A1f	A1g	A1h
Stabilität	stabil	stabil	stabil	stabil	stabil	stabil	stabil	stabil
$F_{z,a}$ in N	0	0	0	0	9,6	14,5	31,6	46,3
t_a in s	0	0,36	0,45	0,48	0,05	0,07	0,08	0,09

Weder das passive noch das aktive Balkensystem knicken für $F_{x,un}$ bei $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ sowie mit $q_{v,num}$, es ist **in allen Fällen stabil**.

Numerische Ergebnisse: Fall A2

Abbildung 5.10 zeigt den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0} = 0\text{ N}$, $F_{z,d15} = 0,15\text{ N}$, $F_{z,d36} = 0,36\text{ N}$ und $F_{z,d54} = 0,54\text{ N}$ und Vorauslenkung $q_{v,num} = 0,0004\text{ m}$ bei **kritischer Knicklast** $F_{x,cr} = 27,8\text{ N}$ auf die erste modale Auslenkung $q_{1,num}(t)$ nach (5.16) und auf die Stabilität des passiven (p) und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems.

Das **passive Balkensystem** mit kritischer Axiallast $F_{x,cr,p}$ knickt in den Fällen A2a bis A2d, Abbildung 5.10 oben. Mit zunehmender Störkraft $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ knickt das Balkensystem immer schneller aus in der Zeit $t_b = 0,280\text{ s}$, $t_b = 0,037\text{ s}$, $t_b = 0,023\text{ s}$ und $t_b = 0,020\text{ s}$. Die aktive Kraft ist $F_{z,a} = 0\text{ N}$, Tabelle 5.6.

Im Phasenportrait ist das instabile Systemverhalten durch eine sich öffnende Spirale dargestellt, d. h. modale Auslenkung und modale Geschwindigkeit nehmen beide kontinuierlich zu, Fälle A2a bis A2d, Abbildung 5.10 unten. Mit zunehmender Störkraft $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ nehmen auch Auslenkung und Geschwindigkeit zu und die Verläufe sind im Phasenportrait steiler.

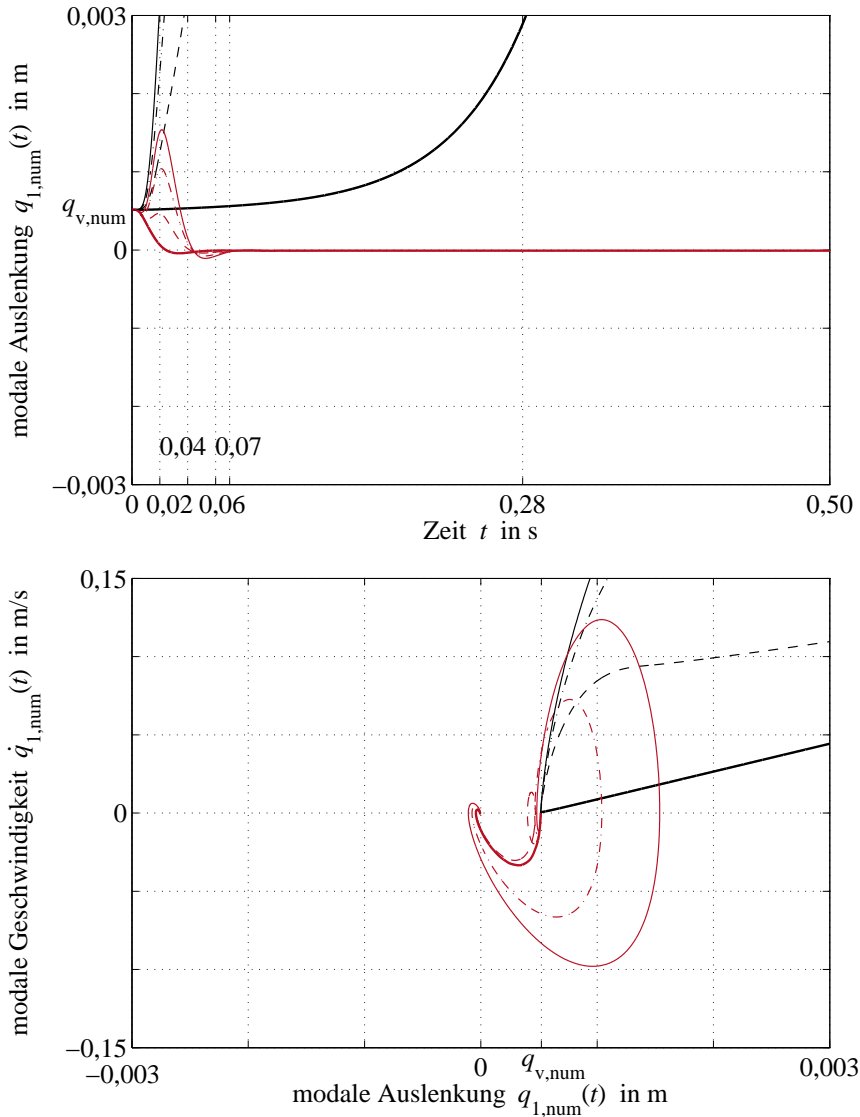


Abbildung 5.10: Fall A2, oben Zeitverläufe und unten Phasenportraits:

- a) $F_{x,cr,p}$, $F_{z,d0}$, $q_{v,num}$ (—), e) $F_{x,cr,a}$, $F_{z,d0}$, $q_{v,num}$ (—),
b) $F_{x,cr,p}$, $F_{z,d15}$, $q_{v,num}$ (—), f) $F_{x,cr,a}$, $F_{z,d15}$, $q_{v,num}$ (—),
c) $F_{x,cr,p}$, $F_{z,d36}$, $q_{v,num}$ (---), g) $F_{x,cr,a}$, $F_{z,d36}$, $q_{v,num}$ (---),
d) $F_{x,cr,p}$, $F_{z,d54}$, $q_{v,num}$ (—), h) $F_{x,cr,a}$, $F_{z,d54}$, $q_{v,num}$ (—)

Das **aktive Balkensystem** mit kritischer Axiallast $F_{x,cr,a}$ wird in den Fällen A2e bis A2h stabilisiert und knickt nicht, Abbildung 5.10 oben. Das aktive Balkensystem regelt die Vorauslenkung $q_{v,num}$ zu 0 und erreicht die Ruhelage abhängig von der Störkraft für $F_{z,d0}$ in $t_a = 0,040$ s mit $F_{z,a} = 16,0$ N, Fall A2e, für $F_{z,d15}$ in $t_a = 0,060$ s mit $F_{z,a} = 18,4$ N, Fall A2f, für $F_{z,d36}$ in $t_a = 0,066$ s mit $F_{z,a} = 52,3$ N, Fall A2g und für $F_{z,d54}$ in $t_a = 0,070$ s mit $F_{z,a} = 81,3$ N, Fall A2h, Tabelle 5.6.

Im Phasenportrait ist das stabile Systemverhalten als Verlauf zum Ursprung dargestellt, d. h. für $F_{x,cr}$ wird die Vorauslenkung $q_{v,num}$ zu 0 geregelt, Fälle A2e bis A2h, Abbildung 5.10 unten. Mit zunehmender Störkraft $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ werden die modale Auslenkung und Geschwindigkeit anfangs größer, laufen jedoch wieder in den Ursprung.

Tabelle 5.6 fasst die Ergebnisse zur Stabilität des Balkensystems, zur aktiven Kraft $F_{z,a}$ und zur Zeit t_b bis zum Ausknicken für das instabile System bzw. die Abklingzeit t_a für das stabile System zusammen.

Tabelle 5.6: Numerische Ergebnisse Fall A2

Fall	A2a	A2b	A2c	A2d	A2e	A2f	A2g	A2h
Stabilität	instabil	instabil	instabil	instabil	stabil	stabil	stabil	stabil
$F_{z,a}$ in N	0	0	0	0	16,0	18,4	52,3	81,3
t_a, t_b in s	0,280	0,037	0,023	0,020	0,040	0,060	0,066	0,070

Das passive Balkensystem ist für $F_{x,cr,p}$ **instabil** und knickt, Fälle A2a bis A2d. Das aktive Balkensystem wird **stabilisiert** und knickt nicht, Fälle A2e bis A2h.

Numerische Ergebnisse: Fall A3

Abbildung 5.11 zeigt den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0} = 0$ N, $F_{z,d15} = 0,15$ N, $F_{z,d36} = 0,36$ N und $F_{z,d54} = 0,54$ N und Vorauslenkung $q_{v,num} = 0,0004$ m bei **überkritischer Axiallast** $F_{x,ue} = 41,5$ N auf die erste modale Auslenkung $q_{1,num}(t)$ nach (5.16) und auf die Stabilität des passiven (p) und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems.

Das **passive Balkensystem** mit überkritischer Axiallast $F_{x,ue,p}$ knickt aus, Fälle A3a bis A3d, Abbildung 5.11 oben. Mit zunehmender Störkraft $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ knickt das Balkensystem immer schneller in $t_b = 0,026$ s, $t_b = 0,015$ s, $t_b = 0,013$ s und $t_b = 0,012$ s aus. Die aktive Kraft ist $F_{z,a} = 0$ N, Tabelle 5.7.

Im Phasenportrait sind kontinuierlich steigende modale Auslenkung und modale Geschwindigkeit als sich öffnende Spiralen dargestellt, Fälle A3a bis A3d, Abbildung 5.11 unten.

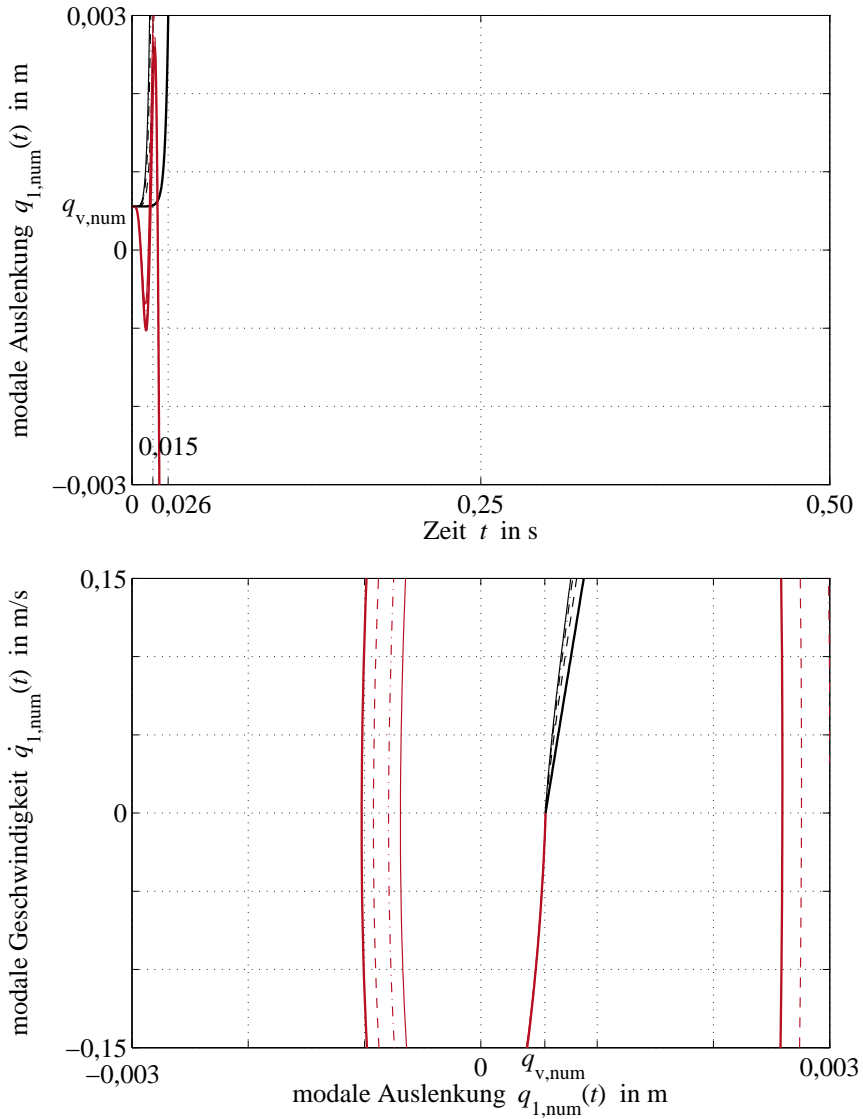


Abbildung 5.11: Fall A3, oben Zeitverläufe und unten Phasenportraits:

- a) $F_{x,ue,p}$, $F_{z,d0}$, $q_{v,num}$ (—), e) $F_{x,ue,a}$, $F_{z,d0}$, $q_{v,num}$ (—),
- b) $F_{x,ue,p}$, $F_{z,d15}$, $q_{v,num}$ (—), f) $F_{x,ue,a}$, $F_{z,d15}$, $q_{v,num}$ (—),
- c) $F_{x,ue,p}$, $F_{z,d36}$, $q_{v,num}$ (—), g) $F_{x,ue,a}$, $F_{z,d36}$, $q_{v,num}$ (—),
- d) $F_{x,ue,p}$, $F_{z,d54}$, $q_{v,num}$ (—), h) $F_{x,ue,a}$, $F_{z,d54}$, $q_{v,num}$ (—)

Das **aktive Balkensystem** mit überkritischer Axiallast $F_{x,ue,a}$ kann numerisch nicht mehr stabilisiert werden und knickt in allen Fällen A3e bis A3h, Abbildung 5.11 oben. Das Balkensystem erreicht die kritische Auslenkung $q_{1,num} = 0,003\text{m}$ abhängig von der Störkraft für $F_{z,d0}$ in $t_b = 0,019\text{s}$, Fall A3e, für $F_{z,d15}$ in $t_b = 0,020\text{s}$, Fall A3f, für $F_{z,d36}$ in $t_b = 0,016\text{s}$, Fall A3g und für $F_{z,d54}$ in $t_b = 0,015\text{s}$, Fall A3h. Knicken wird im Vergleich zum passiven Balkensystem zwar verzögert, jedoch nicht verhindert. Eine Angabe der aktiven Kraft $F_{z,a} > 500\text{N}$ für die Fälle A3b, A3d und A3f ist nicht möglich, da die Begrenzung der Aktuatorkraft erreicht wird, Tabelle 5.7.

Im Phasenportrait ist erkennbar, dass das aktive Balkensystem für $F_{x,ue,a}$ durch die aktive Kraft $F_{z,a}$ in eine Gegenbewegung versetzt wird und aufschwingt bis es schließlich knickt, Fälle A3e bis A3h, Abbildung 5.11 unten. Das aktiv geregelte instabile Balkensystem beschreibt im Phasenportrait jeweils eine sich öffnende Spirale in den Fällen A3e bis A3h.

Tabelle 5.7 fasst die Ergebnisse zur Stabilität des Balkensystems, zur aktiven Kraft $F_{z,a}$ und zur Zeit t_b bis zum Ausknicken für das instabile System zusammen.

Tabelle 5.7: Numerische Ergebnisse Fall A3

Fall	A3a	A3b	A3c	A3d	A3e	A3f	A3g	A3h
Stabilität	instabil	instabil	instabil	instabil	instabil	instabil	instabil	instabil
$F_{z,a}$ in N	0	0	0	0	> 500	> 500	> 500	> 500
t_b in s	0,026	0,015	0,013	0,012	0,019	0,020	0,016	0,015

Das passive und aktive Balkensystem sind für $F_{x,ue}$ **in allen Fällen instabil**, A3a bis A3h und knicken trotz aktiver Stabilisierung.

5.7 Fazit zur numerischen Simulation der aktiven Stabilisierung

Die numerischen Simulationen zeigen den Einfluss der axialen unterkritischen $F_{x,un}$, kritischen $F_{x,cr}$ und überkritischen $F_{x,ue}$ Belastung, der lateralen Störkräfte $F_{z,d0}$, $F_{z,d15}$, $F_{z,d36}$ und $F_{z,d54}$ sowie der statischen lateralen Vorauslenkung $q_{v,num}$ auf das strukturdynamische Verhalten und die Stabilität des passiven und aktiven Balkensystems mit asymmetrischen Lagerungsbedingungen.

Passives Balkensystem

Die Höhe der **Axiallast** F_x wirkt sich wie erwartet auf die Stabilität des passiven Balkensystems aus. Ab der kritischen Knicklast knickt das Balkensystem, Fall A2a, je höher die überkritische Axiallast ist, desto schneller knickt es, ab Fall A3a.

Die laterale statische **Vorauslenkung** destabilisiert das kritisch und überkritisch belastete Balkensystem ab Simulationsbeginn zum Zeitpunkt $t = 0$, Fälle A2a und A3a. Das unterkritisch belastete Balkensystem knickt nicht infolge der Vorauslenkung sondern behält eine endliche statische Auslenkung, Fälle A1a.

Laterale **Störkräfte** begünstigen einen Knickvorgang für kritische und überkritische Axiallasten, Fälle A2b bis A2d und A3b bis A3d. Knicken tritt nach der Wirkung der lateralen Störkraft zum Zeitpunkt $t = 0$ auf. Das unterkritisch belastete Balkensystem wird durch die lateralen Störkräfte zu lateralen schwach gedämpften Schwingungen in der ersten Eigenfrequenz angeregt, deren Schwingungsamplitude linear mit der Höhe der Störkraft zusammenhängt, Fälle A1b bis A1d.

Aktives Balkensystem

Die Höhe der **Axiallast** F_x wirkt sich wie erwartet auf die Stabilität des aktiven Balkensystems aus. Bei der kritischen Knicklast $F_{x,cr}$ kann das Balkensystem noch stabilisiert werden und knickt nicht, ab Fall A2e bis A2h. Für die überkritische Axiallast $F_{x,ue}$ knickt das Balkensystem trotz Regelung hingegen aus, ab Fall A3e.

Die laterale statische **Vorauslenkung** destabilisiert das überkritisch belastete Balkensystem ab Simulationsbeginn zum Zeitpunkt $t = 0$, Fall A3e. Bei dem unterkritisch und kritisch belasteten aktiven Balkensystem wird die laterale Vorauslenkung kompensiert und es bleibt keine endliche Auslenkung, Fälle A1e und A2e.

Laterale **Störkräfte** begünstigen einen Knickvorgang für überkritische Axiallasten, Fälle A3e bis A3h. Das unterkritisch und kritisch belastete aktive Balkensystem wird durch die lateralen Störkräfte zwar zusätzlich lateral ausgelenkt, diese Auslenkung wird aber durch die Regelung in endlicher Zeit kompensiert, Fälle A1f bis A1h und A2f bis A2h. Die Amplitude der lateralen Auslenkung infolge der Störung und Zeit zur Schwingungsberuhigung des aktiven Balkensystems steigen mit zunehmender Höhe der Störkraft an.

6 Experimentelle Erprobung der aktiven Stabilisierung gegen Knicken

Dieses Kapitel stellt die Konstruktion und Komponenten des experimentellen aktiven Balkensystems, die messtechnische Implementierung der aktiven Stabilisierung sowie experimentelle Stichprobenuntersuchungen zur Validierung der in Kapitel 5 numerisch simulierten Ergebnisse vor.

6.1 Konstruktionselemente des aktiven Balkensystems

Zentrale Komponente des **realen aktiven Balkensystems** in Abbildung 6.1 ist ein schlanker, axial auf Druck belasteter knickgefährdeter Balken nach Abbildung 4.1.

Der vertikal angeordnete Balken ① mit Rechteckquerschnitt aus Aluminiumlegierung AlMg3 ist bei $x = 0$ ② fest eingespannt und bei $x = l$ ③ gelenkig gelagert, vgl. Abbildung 4.1. Die geometrischen und werkstofftechnischen Kenngrößen zeigt Tabelle 6.1. Auf den Balken wirkt in der gelenkigen Lagerung ③ eine zeitlich konstante Axiallast mit $F_{x,un} \leq F_x \leq F_{x,ue}$, die durch eine Masse ④ aus Baustahl und die Wirkung der Schwerkraft experimentell erzeugt wird. Aufgrund des rechteckigen Profilquerschnitts knickt der Balken vorzugsweise in der x - z -Ebene, wenn die statische Axiallast F_x die kritische Knicklast $F_{x,cr}$ überschreitet und eine reproduzierbare zeitabhängige laterale Störkraft $F_{z,d}(t)$ eingeleitet wird, die im nächsten Absatz beschrieben wird. Die Masse ④ ist mit Gleitlagern parallel an Führungsschienen ⑤ geführt. An den Führungsschienen ist ein Anschlag ⑥ befestigt, der die Absenkung der Masse ④ und damit die erste modale Auslenkung $q_{1,exp}(t)$ des Balkens im Fall des Ausknickens begrenzt. So wird eine eventuelle plastische Verformung des Balkens bei der Durchführung der Versuche verhindert.

Das Pendel ⑦ kann an der Pendellehre ⑧ definiert ausgelenkt werden; das aus einer definierten Höhe losgelassene Pendel leitet die Störkraft $F_{z,d}(t)$ reproduzierbar an der Stelle $x = x_d$ in den Balken ein, vgl. Abbildung 4.1. Die Zusatzmassen ⑨ in Form von Scheiben aus Baustahl erhöhen die Axiallast in Schritten

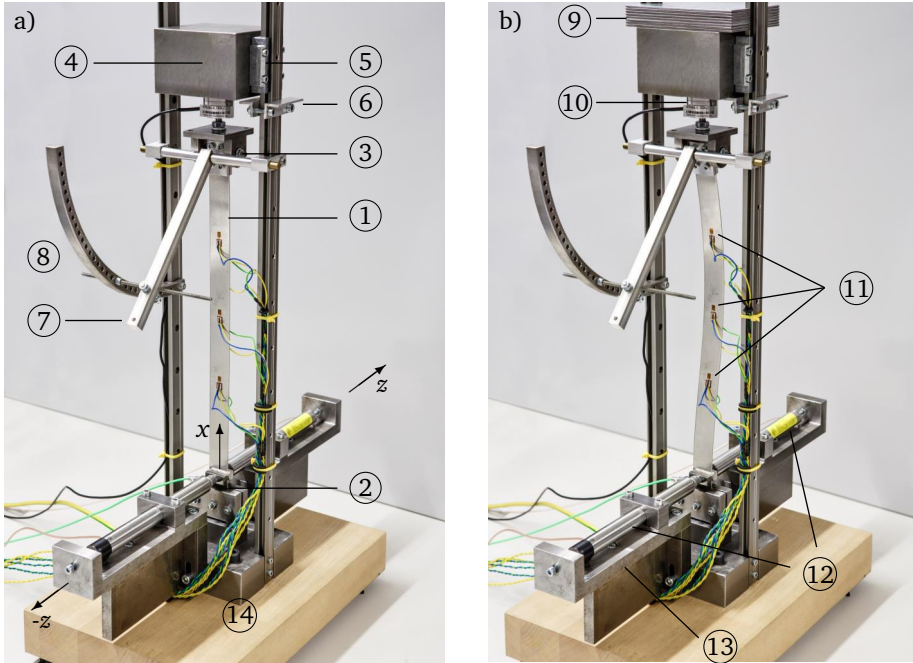


Abbildung 6.1: Versuchsstand aktives Balkensystem a) unterkritisch belastet mit $F_{x,un} = 23,5 \text{ N}$, b) überkritisch belastet mit $F_{x,cr} < F_x = 31,5 \text{ N} < F_{x,ue}$ und ausgeknickt

$\Delta F_x = 1 \text{ N}$. Abbildung 6.1b zeigt den ausgeknickten Balken infolge überkritischer Axiallast $F_{x,cr} < F_x \leq F_{x,ue}$.

Die Kraftmessdose ⑩ zwischen gelenkiger Lagerung ③ und Masse ④ misst die auf den Balken wirkende Axiallast F_x . Die Dehnungsmessstreifen DMS ⑪ an den Sensorpositionen $x_{s,1-3}$ liefern die Dehnung an der Balkenoberfläche, aus der der Verformungszustand des Balkens lokal und global entlang der Balkenlänge l ermittelt werden kann, vgl. Abbildung 4.1.

Die beiden Piezo-Stapelaktuatoren ⑫ üben die aktive Kraft $F_{z,a}(t)$ nach (4.3) lateral auf den Balken aus. Die Aktuatoren werden mittels der Halterung ⑬ an der Basis ⑭ des Versuchsstands abgestützt und mechanisch vorgespannt, Tabelle 6.1. Die Kenndaten der Sensoren und Aktuatoren sind in Anhang A.1 angegeben.

Tabelle 6.1: Komponenten des aktiven Balkensystems, vgl. Abbildungen 4.1 und 6.1

Komp.	Beschreibung
①	Balken mit Abmessungen Länge $l = 0,305$ m, Breite $b = 0,020$ m und Dicke $h = 0,001$ m aus Material AlMg3 mit E-Modul $E = 70 \cdot 10^9$ N/m ² und Dichte $\rho = 2800$ kg/m ³
②	feste Einspannung bei $x = 0$
③	gelenkige Lagerung bei $x = l$
④	Masse $m = 2,380$ kg bei $x = l$, simuliert Axiallast $F_x < F_{x,cr}$
⑤	Führungsschienen mit Gleitlagern <i>IGUS TK-04-15-01</i>
⑥	Anschlag zur Begrenzung der Absenkung der Masse
⑦	Pendel für laterale Störkraft $F_{z,d}(t)$ an Position $x_d = 0,160$ m
⑧	Pendellehre zur definierten Auslenkung des Pendels
⑨	Zusatzmassen $\Delta m = 0,1$ kg zur Erhöhung der Axiallast um $\Delta F_x = 1$ N
⑩	Kraftmessdose <i>ME KM 26z-100N</i>
⑪	Dehnungsmessstreifen DMS <i>HBM 1-LY13-06/120</i> an den Sensorpositionen $x_{s,1} = 0,147$ m, $x_{s,2} = 0,192$ m und $x_{s,3} = 0,245$ m
⑫	Piezo-Stapelaktuatoren <i>PiezoMechanik PSt 150/10/160 VS 15</i> zum Aufbringen der aktiven Kraft $F_{z,a}(t)$ bei $x_a = 0,010$ m
⑬	Halterung für Piezo-Stapelaktuatoren
⑭	Basisplatte des Versuchsstands

6.2 Belastung des aktiven Balkensystems

Dieser Abschnitt erklärt, wie das aktive Balkensystem axial und lateral reproduzierbar belastet wird, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse hinsichtlich des passiven und aktiven Knickverhaltens zu gewährleisten. Die physikalischen Größen aus der experimentellen Simulation werden mit dem Index $_{exp}$ gekennzeichnet.

Axiallast

Die Masse ④ leitet infolge ihrer Schwerkraftwirkung eine statische Axiallast F_x vertikal in den eingespannten Balken ein, Abbildung 6.2a. Diese kann in Schritten von $\Delta F_x = 1$ N erhöht werden, indem Zusatzmassen ⑨ aufgelegt werden, Abbildung 6.2b. Trotz der kleinen Lastspitze beim Auflegen der Zusatzmassen kann die Axiallast als quasistatisch angenommen werden.

Abbildung 6.2 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt der Masse, die Kraftmessdose und die im Experiment auftretenden Zusatzmassen zur Einleitung der Axiallast. Der Anschlag ⑥ verhindert große vertikale Auslenkungen und damit ggf. ein plastisches Knicken des Balkens. Eine Kraftmessdose ⑩ misst die Axiallast F_x .

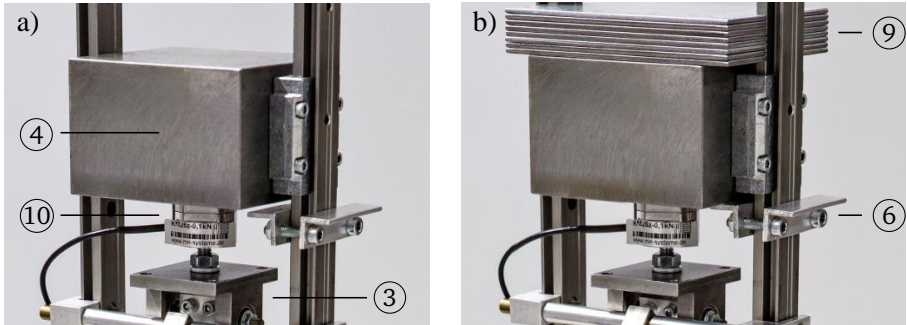


Abbildung 6.2: Einleitung der Axiallast, Detaildarstellung von Anbindung an gelenkige Lagerung ③, Masse ④, Anschlag ⑥, Zusatzmassen ⑨ und Kraftmessdose ⑩, a) unterkritisch belastet mit $F_{x,un}$ ohne Zusatzmasse, b) überkritisch belastet mit $F_{x,cr} < F_x \leq F_{x,ue}$ mit Zusatzmassen, am Anschlag

Infolge einer Auslenkung des Balkens in z -Richtung senkt sich die Masse ④ inkl. Zusatzmassen ⑨ an der gelenkigen Lagerung ③ geringfügig in x -Richtung ab, Abbildung 6.1b.

Laterale Störkraft

Die laterale Störkraft $F_{z,d,exp}(t)$ simuliert am Versuchsstand gewollt eingebrachte Störungen und Imperfektionen im Betrieb eines beliebigen knickgefährdeten Balkensystems und wird durch den Einsatz eines Pendels ermöglicht, das dem Balken einen lateralen Schlag versetzen kann. Es handelt sich um einen Kraftstoß mit Spitzenwerten $F_{z,d15} = 0,15 \text{ N}$, $F_{z,d36} = 0,36 \text{ N}$ und $F_{z,d54} = 0,54 \text{ N}$ vgl. Abbildung 5.6.

Gemessen wird der zeitliche Verlauf der experimentellen Störkraft $F_{z,d15,exp}(t)$ mit einer Kraftunterlagscheibe (Kistler 9001A, Anhang A.1) ⑮, die mit dem Pendel ⑦ verschraubt ist und direkt auf den Balken auftrifft, Abbildung 6.3a. Die definierte Auslenkung des Pendels beim Auslösen wird durch eine Begrenzung realisiert, die per Hand in einer festgelegten Bohrung der Pendellehre ⑧ verschraubt wird. Durch manuelles Auslenken des Pendels bis zur Begrenzung und anschließendes Loslassen kann die Störkraft reproduzierbar erzeugt werden.

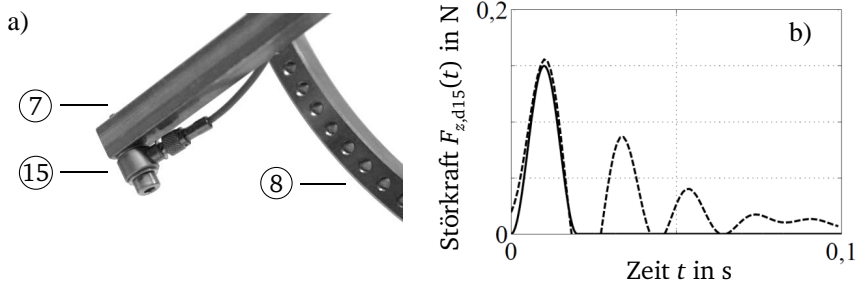


Abbildung 6.3: a) Pendel mit Kraftmessunterlagscheibe, b) Zeitsignal der Störkraft $F_{z,d15,exp}(t)$ (—) und zum Vergleich $F_{z,d15,num}(t)$ (—)

Abbildung 6.3b stellt beispielhaft ein aufgezeichnetes Zeitsignal der gemessenen Störkraft $F_{z,d15,exp}(t)$ infolge des Pendelschlags im Vergleich zur numerisch simulierten Störkraft $F_{z,d15,num}(t)$ dar. Abbildung 6.3 zeigt, dass die Annäherung als Cosinushalbwellen in der numerischen Simulation nach Abschnitt 5.6 für den Kraftstoß gültig ist. Das Pendel berührt den Balken im Experiment nur einmal für die erste Kraftspitze mit $F_{z,d15,exp} \approx 0,15$ N, das Nachschwingen des gemessenen Kraftsignals wirkt nicht auf den Balken. Die Stoßdauer von 0,020 s aus den numerischen Simulationen in Abschnitt 5.6 wird hiermit bestätigt.

Tabelle 6.2 zeigt aus einer Voruntersuchung die aus jeweils 8 Versuchen gemittelten Spitzenwerte und deren Standardabweichung für die Störkräfte $F_{z,d15,exp} = 0,15$ N, $F_{z,d36,exp} = 0,36$ N und $F_{z,d54,exp} = 0,54$ N. Nach dem KOLMOGOROW-SMIRNOW-Hypothesentests mit $\alpha = 0,05$ ist die Annahme der Normalverteilung für die jeweils 8 gemessenen Störkräfte gültig und die Versuchsanzahl damit hinreichend. Die ermittelten Störkräfte wurden auch für die numerischen Simulationen in Abschnitt 5.6 verwendet.

Tabelle 6.2: Gemittelte Spitzenwerte μ und Standardabweichung σ der Störkraft $F_{z,d,exp}(t)$

	$F_{z,d15,exp}$	$F_{z,d36,exp}$	$F_{z,d54,exp}$
Mittelwert $\mu(F_{z,d,exp})$ in N	0,15	0,36	0,54
Standardabweichung $\sigma(F_{z,d,exp})$ in N	0,03	0,03	0,03

Die gemessene Störkraft $F_{z,d15,exp} \approx 0,15$ N besitzt eine Standardabweichung der Spitzenwerte von ca. 20% der Störkraft, für $F_{z,d36,exp} \approx 0,36$ N beträgt diese ca. 8,3% und für $F_{z,d54,exp} \approx 0,54$ N ca. 5,6%. Es wird angenommen, dass in den Expe-

rimenten mit $F_{z,d15,exp}$ die Streuung der Versuchsergebnisse vergleichsweise größer ist als für $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$.

Für die folgenden Versuche wird die Kraftmessunterlagscheibe (15) in Abbildung 6.3 entfernt und ein Ersatzgewicht an der Pendelspitze verwendet, das die Masse des Sensors substituiert.

6.3 Messwerterfassung und Regelkreis für aktive Stabilisierung

Dieser Abschnitt erklärt die Messwerterfassung und den Regelkreis für die aktive Stabilisierung am Balkensystem.

Ermitteln des Verformungszustands

Der Verformungszustand des Balkens wird durch Dehnungsmessung mit resistiven Dehnungsmessstreifen (DMS) ermittelt, da diese sich für die Messung zeitlich konstanter sowie zeitabhängiger Signale eignen, [31].

Die Eignung der Messstellen $x_{s,1-3}$ wird mit dem Beobachtbarkeitsindex überprüft, Abbildung 5.2. An jeder der Messstellen sind zwei DMS kolloziert appliziert, je ein DMS auf jeder Seite des flachen Balkens. Abbildung 6.1 stellt die DMS (11) an den drei Messstellen auf der Vorderseite des flachen Balkens dar.

Die DMS werden über eine WHEATSTONESche Halbbrücke miteinander verschaltet. Die Ausgangsspannung ergibt sich somit aus der Dehnung $\varepsilon_a(t)$ und $\varepsilon_b(t)$ der beiden kollozierten DMS, der Dehnungsempfindlichkeit k_{DMS} (k -Faktor) und der Brückenspeisespannung U_B , [31],

$$U_\varepsilon(t) = U_B \cdot \frac{k_{DMS}}{4} (\varepsilon_a(t) - \varepsilon_b(t)). \quad (6.1)$$

Dehnungsanteile infolge möglicher Einflüsse von Änderungen der Temperatur und Axiallast werden bei der Halbbrücke kompensiert, [31]. Insbesondere die Kompensation der Dehnung infolge Axiallast ist für die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Versuche relevant, da diese sich in den Versuchen häufig ändert und ein Einfluss auf die Ermittlung des Verformungszustands ausgeschlossen werden kann.

Informationsverarbeitung zur Regelung

Abbildung 6.4 zeigt den in dieser Arbeit zugrunde liegenden Regelkreis des aktiven Balkensystems für den experimentellen Versuch. Zusätzlich zum Regelkreis für die numerische Simulation in Abbildung 5.5 sind die experimentellen Komponenten bzw. Geräte für Regelstrecke, Tiefpassfilterung und Regelung dargestellt.

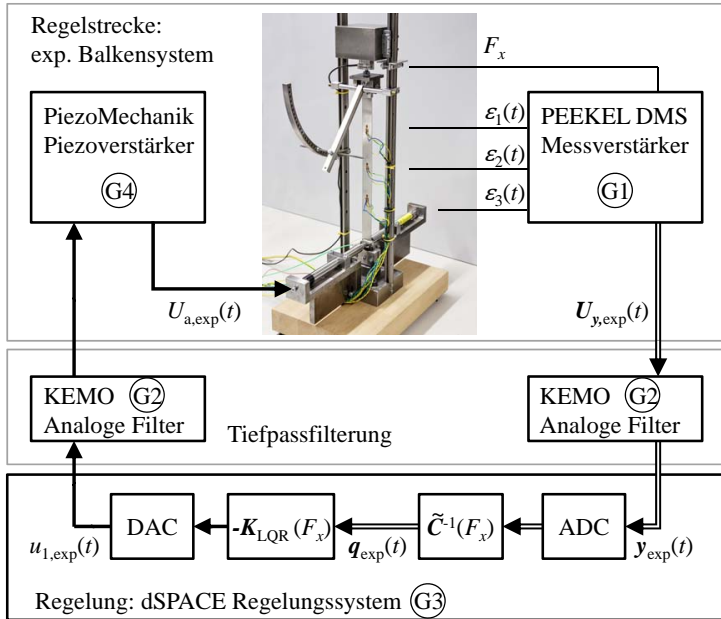


Abbildung 6.4: Regelkreis des Zustandsraummodells mit Rückführung $K_{LQR}(F_x)$ der modalen Zustandsgrößen und Signalkonditionierung

Tabelle 6.3 fasst die verwendeten Mess- und Regelgeräte zusammen. Der DMS Messverstärker (G1) wandelt die Dehnung der DMS nach Gleichung (6.1) in elektrische Messsignale um. Eine DMS-basierte Kraftmessdose misst die Axiallast F_x . Das gemessene Dehnungssignal der DMS an den drei Messstellen und der Axiallast wird als elektrisches Signal $U_{y,exp}(t)$ zusammengefasst und mit analogen Filtern (G2) zu $y_{exp}(t)$ tiefpassgefiltert, Abschnitt 5.5.

Tabelle 6.3: Mess- und Regelgeräte des aktiven Balkensystems, s. Anhang A.2

Gerät	Beschreibung
(G1)	Trägerfrequenz-Messverstärker für DMS PEEKEL Picas LCD-4F
(G2)	Analoge Filter KEMO Benchmaster 21M, elliptische Filter 6. Ordnung
(G3)	Messwerterfassungs- und Regelungssystem dSPACE ACE1103
(G4)	Piezo-Verstärker PiezoMechanik LE-100/200-100

Anschließend findet im Regelungssystem (G3) die Verarbeitung der Sensorsignale und Regelung statt, Abbildung 6.4. Dafür wird das gefilterte Dehnungsmesssignal

$y_{\text{exp}}(t)$ durch einen Analog-Digital-Wandler (ADC) digitalisiert. Die Abtastung erfolgt mit der in Abschnitt 5.5 berechneten Abtastzeit von $T_A = 50 \mu\text{s}$. Anschließend wird die elektrische Spannung des Dehnungssignals durch Umstellen der Halbbrücken-Gleichung (6.1) wieder in eine Dehnung zurücktransformiert. Die Signale der Axiallast F_x werden nun getrennt weiterverarbeitet. Die Dehnungssignale an den drei Sensorpositionen werden wie in Abschnitt 5.5 mit der axiallastabhängigen Inversen der Ausgangsmatrix $\tilde{C}^{-1}(F_x)$ in modale Auslenkungen $[q_{1,\text{exp}}(t) \ q_{2,\text{exp}}(t) \ q_{3,\text{exp}}(t)]^T$ umgerechnet, wie in Gleichung (5.14) zur numerischen Simulation für $q_{1-3,\text{num}}(t)$.

Die modalen Auslenkungen $[q_{1,\text{exp}}(t) \ q_{2,\text{exp}}(t) \ q_{3,\text{exp}}(t)]^T$ werden numerisch nach der Zeit abgeleitet und der experimentelle Zustandsvektor $\mathbf{q}_{\text{exp}}(t)$ aufgestellt. Eine Verstärkung der Rauschanteile durch numerisches Differenzieren wird in der Messkette durch Tiefpassfilterung kompensiert, siehe Abbildung 6.4. Das Produkt aus der axiallastabhängigen Reglermatrix $\mathbf{K}_{\text{LQR}}(F_x)$ und Zustandsvektor $\mathbf{q}_{\text{exp}}(t)$ liefert die zu stellende aktive Kraft $F_{z,a,\text{exp}}(t)$.

Für die durchgeführten Experimente werden im Vorhinein Reglermatrizen $\mathbf{K}_{\text{LQR},1-3}$ für drei Axiallastbereiche entworfen, es handelt sich also um eine adaptive Regelung, siehe Abschnitt 5.3. Jede Reglermatrix stabilisiert das Balkensystem in einem Axiallastbereich. Die Axiallastbereiche der entworfenen Regler grenzen aneinander, Tabelle 6.4. Bei den Axiallasten $F_x = 34,5 \text{ N}$ und $F_x = 38,5 \text{ N}$ wird auf die nächste Reglermatrix umgeschaltet, da das System sonst bei einer weiteren Erhöhung der Axiallast ausknickt. Für Axiallasten $F_x > 40,5 \text{ N}$ wurde kein stabilisierender Regler gefunden. Die drei Reglermatrizen werden im Betrieb von Hand umgeschaltet, sobald die untere bzw. obere Grenze des jeweiligen Axiallastbereichs erreicht ist. Beim Versuch eines automatisierten Schaltens ist das System stets im Schaltvorgang ausgeknickt.

Tabelle 6.4: Axiallastbereiche mit stabilisierenden Reglermatrizen, [17]

Reglermatrix	Axiallastbereich für Stabilisierung
$\mathbf{K}_{\text{LQR},1}$	$F_x = 23,5 \text{ N bis } 34,5 \text{ N}$
$\mathbf{K}_{\text{LQR},2}$	$F_x = 34,5 \text{ N bis } 38,5 \text{ N}$
$\mathbf{K}_{\text{LQR},3}$	$F_x = 38,5 \text{ N bis } 40,5 \text{ N}$

Ein Digital-Analog-Wandler (DAC) wandelt das digitale Regelungssignal wieder in ein analoges Signal $u_{1,\text{exp}}(t)$. Die Verstärkung der Rauschanteile durch numerisches Differenzieren des Zustandsvektors $\mathbf{q}_{\text{exp}}(t)$ wird durch die analoge Tiefpassfilterung ② des Ausgangssignals $u_{1,\text{exp}}(t)$ kompensiert, bevor es im Piezo-

verstärker (G4) verstärkt wird. Die Piezo-Stapelaktuatoren (12) erzeugen schließlich die aktive Kraft $F_{z,a,exp}(t)$.

Anordnung und Ansteuerung der Piezo-Stapelaktuatoren

Für die Stabilisierung gegen Knicken mittels aktiver Kräfte werden Piezo-Stapelaktuatoren (12) nahe der festen Einspannung (2) des aktiven Balkensystems eingesetzt. Die Aktuatorposition bei ca. 1% der Balkenlänge l hat den Vorteil, den Großteil der Balkenoberfläche frei von zusätzlichen Aktuatoren für die aktive Stabilisierung zu halten. Die Aktuatorposition nahe der Einspannung ist nur sinnvoll, wenn hohe Stellkräfte wirken können. Sie ist vertretbar im Hinblick auf die Blockierkraft $F_{a,max} = 3500\text{ N}$ und die maximalen freien Stellwege $\Delta l_{max} = 160\text{ }\mu\text{m}$, die von den beiden verwendeten Piezo-Stapelaktuatoren (12) gerade noch erzeugt werden können.

Da Piezo-Stapelaktuatoren nur Druckkräfte aufbringen können, sind die beiden Piezo-Stapelaktuatoren (12) einander entgegengesetzt in positive und negative z -Richtung angeordnet, Abbildung 6.5. Die mechanische Vorspannung beschränkt sich auf das manuelle Justieren der Aktuatoren mittels der Spannvorrichtung (17), so dass beide Druckstücke (16) der Aktuatoren am Balken anliegen und der Balken nicht durch die Aktuatoren vorausgelenkt wird. Mit der Klemmvorrichtung (18) werden die Gehäuse der Aktuatoren in ihrer Position mechanisch fixiert.

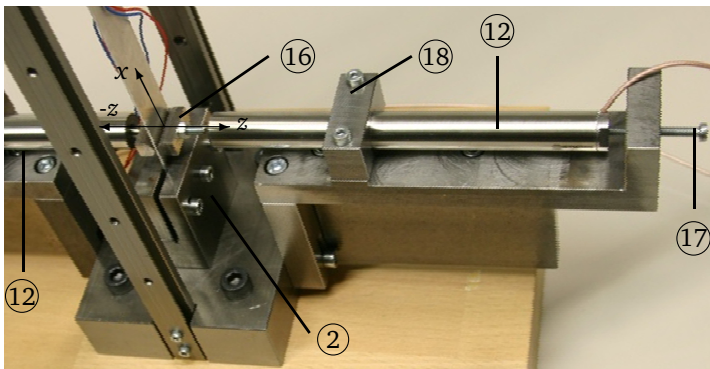


Abbildung 6.5: Piezo-Stapelaktuatoren (12), feste Einspannung (2) mit Druckstück (16), Spannvorrichtung (17) und Klemmvorrichtung (18)

Die elektrische Vorspannung der Aktuatoren erfolgt durch Anlegen einer elektrischen Spannung $U = 75\text{ V}$, der Hälfte ihrer Maximalspannung $U_{max} = 150\text{ V}$. Das

Ansteuersignal aus der Regelung wird für einen Aktuator zur elektrischen Vorspannung addiert, für den zweiten Aktuator von der elektrischen Vorspannung subtrahiert. Während sich ein Aktuator ausdehnt, zieht sich der gegenüberliegende Aktuator zusammen, durch die mechanische Vorspannung geschieht beides unter anhaltender mechanischer Druckvorspannung. Die Aktuatoren können so in ihrem gesamten Spannungsbereich von 0 bis 150V betrieben werden. Die elektrische Vorspannung bewirkt eine Klemmung des Balkens und ermöglicht den Betrieb der Aktuatoren sowohl in positive als auch in negative z -Richtung, Abbildung 4.1.

Alle Versuche werden zudem mit elektrisch vorgespannten Aktuatoren durchgeführt. Das gilt sowohl für das passive als auch das aktive Balkensystem. Damit ist gewährleistet, dass die Ergebnisse vergleichbar sind.

Die Streuung von Aktuatoreigenschaften hat einen Einfluss auf die aktive Stabilisierung gegen Knicken, ist jedoch nicht Teil dieser Arbeit und wird im Rahmen eines weiteren Teilprojekts im Sonderforschungsbereich SFB 805 numerisch und experimentell untersucht, [45], [46] und [44].

Nullabgleich der DMS

Um reproduzierbare und vergleichbare Ergebnisse in mehreren Versuchen zu erhalten ist es wichtig, die **Nulllage** des Systems, d. h. die Auslenkung $q_{1-3}(t) = 0$ zu kennen und definiert manuell einstellen zu können. Der axial druckbelastete reale Balken mit Vorauslenkung $q_{v,exp}$ ist jedoch auch in seiner Ruhelage nicht ideal gerade. Aus diesem Grund wurde folgendes Vorgehen entwickelt, um die Dehnungsmessstreifen in der Nulllage des Systems stets auf Null-Dehnung zu kalibrieren.

1. Begradigung des Balkens durch Aufbringen einer Zugbelastung durch Klemmung einer Unterlegscheibe zwischen Masse ④ und Anschlag ⑥,
2. Nullabgleich der Dehnungsmessstreifen ⑪ und
3. Entfernen der Zugbelastung,

Abbildung 6.1. Durch dieses Vorgehen kann der Balken kurzfristig und definiert begradigt werde, um den Nullabgleich der Sensoren am Messverstärker ⑥1 durchzuführen. Dies ist insbesondere notwendig, da die Sensorsignale über mehrere Versuche hinweg einer Drift unterliegen. Ferner ist es durch den Nullabgleich möglich, die Vorauslenkung $q_{v,exp}$ des Balkens mit der vorhandenen Messtechnik zu erfassen.

6.4 Anpassung des numerischen Modells an das experimentelle Balkensystem

Für die Auslegung einer Regelung für das aktive Balkensystem ist es notwendig, das Modell des passiven Balkensystems mit den experimentellen Aufbau abzugleichen. Da das passive Balkensystem bei überkritischer Belastung ausknickt und damit eine Identifikation der Regelstrecke nicht zulässt, wird eine Identifikation im geschlossenen Regelkreis durchgeführt, [20]. Diese erfolgt sowohl für das unterkritisch mit $F_{x,\text{un}}$ als auch für das überkritisch mit $F_x > F_{x,\text{cr}}$ belastete Balkensystem.

Bei der Identifikation im geschlossenen Regelkreis werden die Aktuatoren einerseits mit einem Regelungssignal angesteuert, um das Balkensystem zu stabilisieren. Andererseits werden sie mit einem überlagerten Testsignal angesteuert, um das Balkensystem im definierten Frequenzbereich zwischen $\Omega_0 = 0 \text{ 1/s}$ und der Eckkreisfrequenz der Tiefpassfilterung $\Omega_{\text{end}} = 1900 \text{ 1/s}$ nach (5.20) zu Schwingungen anzuregen und die Schwingungsantwort des elektrischen Dehnungssignals $U_{y,\text{exp}}(t)$ aufzuzeichnen. Das Testsignal ist nur so groß, dass das geregelte Balkensystem dadurch nicht ausknickt. Als Testsignal wird ein bidirektionaler, quadratischer Gleitsinus $U_{\text{Ident}}(t) = \hat{U} \sin(\Omega_e t)$ mit Erregerkreisfrequenz Ω_e und Spannungsamplitude $\hat{U} = 4 \text{ V}$ verwendet,

$$\Omega_e = \Omega_0 + \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{t_{\text{end}}^2} t^2. \quad (6.2)$$

Durch das bidirektionale, quadratische Form des Testsignals entsteht kein Sprung in der Anregungsamplitude bei der Startkreisfrequenz Ω_0 und der Endkreisfrequenz Ω_{end} zum Zeitpunkt t_{end} , die ein Knicken des Balkensystems hervorrufen könnten. Das Testsignal $U_{\text{Ident}}(t)$ wird zum Regelungssignal $U_a(t)$ addiert, so dass die elektrische Spannung

$$U_{\text{Aktuator}}(t) = U_{a,\text{exp}}(t) + U_{\text{Ident}}(t) \quad (6.3)$$

an den Aktuatoren anliegt, Linearität vorausgesetzt. Als Ausgangsgröße wird die elektrische Spannung $U_{y,\text{exp}}(t)$ durch den Messverstärker $\textcircled{G1}$ gemäß Abbildung 6.4 an den drei DMS ausgewertet.

Mit Hilfe des verbreiteten Eigensystem Realization Algorithm (ERA) [36] wird aus den Zeitsignalen der Eingangsgröße $U_{\text{Aktuator}}(t)$ und der Ausgangsgröße $U_{y,\text{exp}}(t)$ die Systemmatrix $A(F_x)$ nach Gleichung (4.37) der ZRD des passiven Balkensystems ermittelt, die das dynamische Verhalten des Systems für die untersuchten Axiallasten abbildet,

$$A(F_x) = f(U_{\text{Aktuator}}(t), U_{y,\text{exp}}(t)). \quad (6.4)$$

Die Eigenwerte von $A(F_x)$ werden nach Gleichung (5.1) berechnet und mit Gleichung (5.2) und (5.3) die modalen Dämpfungswerte

$$\theta_{n,\text{exp}} = \left(1 + \left(\frac{|\Im\{\lambda_{n,\text{exp}}\}|}{|\Re\{\lambda_{n,\text{exp}}\}|} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (6.5)$$

und gedämpften Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_{n,\text{exp}} = |\Im\{\lambda_{n,\text{exp}}\}| \quad \text{sowie} \quad \omega_{1,\text{exp}} = |\Im\{\lambda_{1,\text{exp}}\}| \quad \text{für } F_x > F_{x,\text{cr}} \quad (6.6)$$

ermittelt, [20]. Es werden schließlich die komplexen gedämpften Eigenkreisfrequenzen des numerischen Modells mit denen des experimentellen Aufbaus verglichen, Abbildung 6.6. Oberhalb der kritischen Knicklast $F_{x,\text{cr,exp}} = 28,5\text{N}$ für $F_x > 32,5\text{N}$ knickt das Balkensystem infolge des Anregungssignals $U_{\text{Ident}}(t)$ trotz Regelung aus, so dass die Identifikation für derart hohe Axiallasten nicht erfolgen kann.

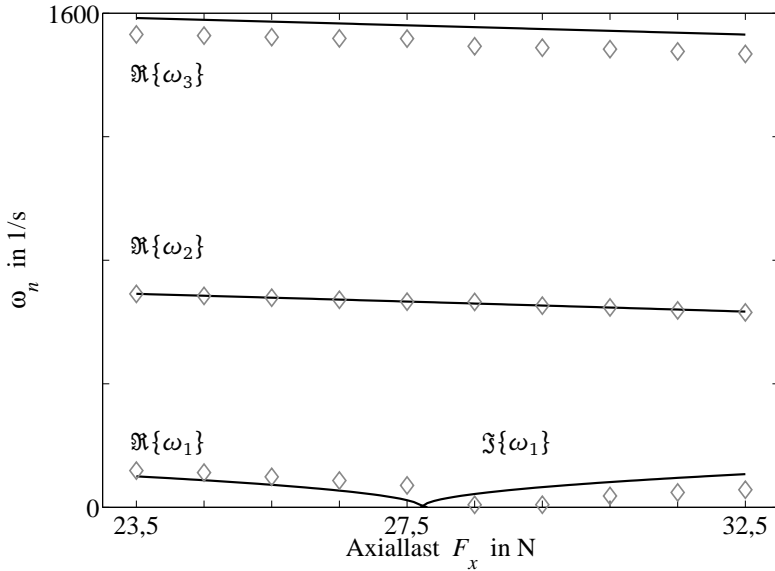


Abbildung 6.6: Vergleich der numerisch (—) und experimentell (◇) ermittelten komplexen Eigenkreisfrequenzen mit Realteil \Re und Imaginärteil \Im

Die relativen Abweichungen zwischen numerisch und experimentell ermittelten Eigenkreisfrequenzen

$$\text{err}(\omega_n) = \frac{\omega_{n,\text{exp}} - \omega_{n,\text{num}}}{\omega_{n,\text{num}}} \quad (6.7)$$

werden mit den Werten für die numerischen und experimentellen Eigenkreisfrequenzen $\omega_{n,\text{num}}$ und $\omega_{n,\text{exp}}$ berechnet.

Tabelle 6.5 zeigt die experimentell ermittelten Eigenkreisfrequenzen $\omega_{n,\text{exp}}$ und die modalen Dämpfungswerte $\theta_{n,\text{exp}}$ der ersten drei Schwingungseigenformen im Vergleich zu den numerisch ermittelten Eigenkreisfrequenzen $\omega_{n,\text{num}}$. Tabelle 6.5 ist in zwei Bereiche aufgeteilt. Axiallasten $F_{x,\text{num}} = F_{x,\text{exp}} \leq 27,5 \text{ N}$ sind unterkritisch, $F_{x,\text{num}} = F_{x,\text{exp}} \geq 28,5 \text{ N}$ sind überkritisch.

Sowohl numerisch als auch experimentell sinken die Eigenkreisfrequenzen ω_2 und ω_3 wie erwartet für steigende Axiallast zwischen $F_{x,\text{exp}} = 23,5 \text{ N}$ und $32,5 \text{ N}$. Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 sinkt wie erwartet bis zur kritischen Knicklast, für überkritische Axiallast hat sie den Realteil $\Re\{\omega_1\} = 0$ und einen steigenden Imaginärteil $\Im\{\omega_1\} > 0$. Dies beschreibt das instabile Systemverhalten für überkritische Axiallasten.

Der relative Fehler zwischen den numerisch und experimentell ermittelten ersten Eigenkreisfrequenzen $\text{err}(\omega_1)$ nach Gleichung (6.7) ist am größten nahe der kritischen Knicklast. Durch die großen Änderungen des Systemverhaltens nahe der experimentell ertragbaren Axiallast $F_{x,\text{cr,exp}}$ mit Vorzeichenwechsel der Eigenwerte ist das Balkensystem in diesem Bereich besonders sensitiv und weist in den Eigenkreisfrequenzen Abweichungen $|\text{err}(\omega_1)| \approx 195\%$ auf. Je weiter die Axiallast $F_{x,\text{exp}}$ von der ertragbaren Axiallast $F_{x,\text{cr,exp}}$ entfernt ist, desto kleiner sind die relativen Abweichungen der ersten Eigenkreisfrequenz bis $|\text{err}(\omega_1)| \approx 14\%$ für $F_{x,\text{un}} = 23,5 \text{ N}$.

Die Abweichungen der zweiten und dritten Eigenkreisfrequenzen sind deutlich kleiner als die Abweichungen der ersten Eigenkreisfrequenzen mit $|\text{err}(\omega_2)| < 1\%$ und $|\text{err}(\omega_3)| < 5\%$ für alle Axiallasten. Eine Tendenz, dass die Abweichungen nahe der kritischen Knicklast am größten sind, ist nicht eindeutig feststellbar.

Die Werte für die modale Dämpfung $\theta_{1,\text{exp}}$ steigen mit zunehmender Axiallast an. Für die Werte $\theta_{2,\text{exp}}$ und $\theta_{3,\text{exp}}$ ist im betrachteten Axiallastbereich keine Tendenz mit zunehmender Axiallast erkennbar.

Für Axiallasten $F_x > 32,5 \text{ N}$ werden die Werte für die modale Dämpfung für $F_x = 32,5 \text{ N}$ aus Tabelle 6.5 weiterhin als gültig angenommen und zu $\theta_{1,\text{exp}} = 1$, $\theta_{2,\text{exp}} = 0,027$ und $\theta_{3,\text{exp}} = 0,049$ festgelegt. Die Eigenkreisfrequenzen für überkritische Axiallasten $F_x > 32,5 \text{ N}$ werden aus dem angepassten numerischen Modell berechnet.

Tabelle 6.5: Vergleich numerisch ermittelter Eigenkreisfrequenzen $\omega_{n,d,num}$ und experimentell ermittelter Eigenkreisfrequenzen $\omega_{n,d,exp}$ mittels relativer Abweichung $err(\omega_n)$ sowie experimentell ermittelte modale Dämpfung $\theta_{n,exp}$ bei steigenden Axiallasten bis 27,5 N (unterkritisch) und bis 32,5 N (überkritisch) für Modellabgleich, vgl. [20]

$F_{x,num}$ $F_{x,exp}$ in N	numerisch			experimentell			relativer Fehler			experimentell		
	$\omega_{1,num}$ in 1/s	$\omega_{2,num}$ in 1/s	$\omega_{3,num}$ in 1/s	$\omega_{1,exp}$ in 1/s	$\omega_{2,exp}$ in 1/s	$\omega_{3,exp}$ in 1/s	$err(\omega_1)$ in %	$err(\omega_2)$ in %	$err(\omega_3)$ in %	$\theta_{1,exp}$	$\theta_{2,exp}$	$\theta_{3,exp}$
23,5	104,4	691,3	1592,1	118,9	691,0	1531,1	+13,89	-0,04	-3,83	0,093	0,024	0,050
24,5	91,3	684,9	1586,3	112,4	684,7	1527,3	+23,11	-0,03	-3,72	0,096	0,025	0,047
25,5	75,9	678,4	1580,7	98,7	678,6	1522,5	+30,04	+0,03	-3,68	0,118	0,024	0,048
26,5	56,3	671,8	1575,4	86,6	671,9	1518,2	+53,81	+0,02	-3,63	0,213	0,024	0,046
27,5	24,0	665,1	1568,2	70,9	666,0	1517,7	+195,42	+0,14	-3,22	0,232	0,022	0,048
28,5	44,9i	658,4	1562,7	7,9i	664,9	1492,9	-82,41	+0,98	-4,47	0,291	0,026	0,046
29,5	68,0i	651,7	1556,8	8,2i	653,1	1488,3	-87,90	+0,21	-4,40	0,551	0,028	0,046
30,5	85,1i	644,8	1549,9	36,7i	647,2	1483,4	-56,87	+0,37	-4,29	1	0,033	0,046
31,5	99,3i	637,9	1543,6	48,1i	637,6	1476,2	-50,55	-0,05	-4,36	1	0,030	0,047
32,5	111,7i	630,9	1537,5	59,7i	631,2	1468,1	-46,55	+0,05	-4,51	1	0,027	0,049

Die experimentell ermittelten Werte für die Eigenkreisfrequenzen $\omega_{n,\text{exp}}$ und die modalen Dämpfungen $\theta_{n,\text{exp}}$ werden in die Systemmatrix $A(F_x)$ nach Gleichung (4.37) des numerischen Zustandsraummodells aus Kapitel 4 eingesetzt. In den numerischen Simulationen in Abschnitt 5.6 wurden bereits die experimentell ermittelten modalen Dämpfungen verwendet. Das abgeglichene Modell wird zur Auslegung der Regler für die folgenden Abschnitte verwendet.

Die experimentelle Identifikation der Regelstrecke wurde in keiner der gefundenen Arbeiten zur aktiven Stabilisierung gegen Knicken aus Abschnitt 2.3 durchgeführt bzw. dokumentiert.

6.5 Ergebnisse der aktiven Stabilisierung im Zeitbereich

Dieser Abschnitt stellt experimentell ermittelte Zeitverläufe der modalen Auslenkung $q_{1,\text{exp}}(t)$ und Phasenportraits $\dot{q}_{1,\text{exp}}(t)$ gegenüber $q_{1,\text{exp}}(t)$ der aktiven Stabilisierung dar, die in Abschnitt 5.6 bereits numerisch gezeigt wurden. Die numerischen Belastungsfälle A1, A2 und A3 nach Tabelle 5.4 werden für die experimentelle aktive Stabilisierung mit B1, B2 und B3 bezeichnet, Tabelle 6.7.

Übersicht der experimentell untersuchten Fälle

Tabelle 6.6 fasst die Kurzschreibweise der betrachteten axialen und lateralen Lastfälle nochmals zusammen. Nur die kritische Axiallast $F_{x,\text{cr},\text{exp}}$ hat sich gegenüber den numerischen Werten aus Tabelle 5.3 verändert.

Tabelle 6.6: Bezeichnung der experimentell simulierten Lastfälle

Axiallast	Störkraft	Vorauslenkung	Regelung
$F_{x,\text{un},\text{exp}} = 23,5 \text{ N}$ $F_{x,\text{cr},\text{exp}} = 28,5 \text{ N}$ $F_{x,\text{ue},\text{exp}} = 41,5 \text{ N}$	$F_{z,\text{d0},\text{exp}} = 0 \text{ N}$ $F_{z,\text{d15},\text{exp}} = 0,15 \text{ N}$ $F_{z,\text{d36},\text{exp}} = 0,36 \text{ N}$ $F_{z,\text{d54},\text{exp}} = 0,54 \text{ N}$	$q_{v,\text{exp}} = 0,0004 \text{ m}$	passiv $\square_p, F_{z,a} = 0 \text{ N}$ aktiv $\square_a, F_{z,a} \neq 0 \text{ N}$

Tabelle 6.7 zeigt die experimentell simulierten Kombinationen aus Axiallast $F_{x,\text{exp}}$, Störkräften $F_{z,\text{d0},\text{exp}}$, $F_{z,\text{d15},\text{exp}}$, $F_{z,\text{d36},\text{exp}}$ und $F_{z,\text{d54},\text{exp}}$ sowie Vorauslenkung $q_{v,\text{exp}}$ sowohl des passiven als auch des aktiv stabilisierten Balkensystems, Fälle B1, B2 und B3 und jeweilige Unterteilung a bis d und e bis h, analog zu den numerischen Fällen A1, A2 und A3 in Tabelle 5.4.

Tabelle 6.7: Experimentell simulierte Fälle in Abbildungen 6.7 bis 6.9 für Balkensystem mit Vorauslenkung und Störkraft

Fall	Axiallast $F_{x,\text{exp}}$ passiv/aktiv	Störkraft				Vorauslenkung $q_{v,\text{exp}}$
		$F_{z,d0,\text{exp}}$	$F_{z,d15,\text{exp}}$	$F_{z,d36,\text{exp}}$	$F_{z,d54,\text{exp}}$	
B1a-d	$F_{x,\text{un,p,exp}}$	—	—	—	—	$q_{v,\text{exp}}$
B1e-h	$F_{x,\text{un,a,exp}}$	—	—	—	—	$q_{v,\text{exp}}$
B2a-d	$F_{x,\text{cr,p,exp}}$	—	—	—	—	$q_{v,\text{exp}}$
B2e-h	$F_{x,\text{cr,a,exp}}$	—	—	—	—	$q_{v,\text{exp}}$
B3a-d	$F_{x,\text{ue,p,exp}}$	—	—	—	—	$q_{v,\text{exp}}$
B3e-h	$F_{x,\text{ue,a,exp}}$	—	—	—	—	$q_{v,\text{exp}}$

Experimentelle Ergebnisse: Fall B1

Abbildung 6.7 zeigt den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0,\text{exp}}$, $F_{z,d15,\text{exp}}$, $F_{z,d36,\text{exp}}$ und $F_{z,d54,\text{exp}}$ und Vorauslenkung $q_{v,\text{exp}}$ bei **unterkritischer Axiallast** $F_{x,\text{un,exp}}$ auf die gemessene erste modale Auslenkung $q_{1,\text{exp}}(t)$ und auf die Stabilität des passiven (p) und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems.

Das **passive Balkensystem** ist mit der unterkritischen Axiallast $F_{x,\text{un,p,exp}}$ belastet. Infolge der Axiallast $F_{x,\text{un,exp}}$ beträgt die Vorauslenkung auf $q_{v,\text{exp}} = 0,0006 \text{ m}$. Ohne Störung $F_{z,d0,\text{exp}}$ ist der Balken in Ruhe, Fall B1a. Wirken auf das passive Balkensystem die Störkräfte $F_{z,d15,\text{exp}}$, $F_{z,d36,\text{exp}}$ und $F_{z,d54,\text{exp}}$, so wird der Balken zu gedämpften Schwingungen angeregt, Fall B1b bis B1d, Abbildung 6.7 oben. Nach $t_a = 0,29 \text{ s}$, $t_a = 0,32 \text{ s}$ und $t_a = 0,35 \text{ s}$ gilt der Balken als schwingungsberuhigt.

Im Phasenportrait ist das stabile Systemverhalten ohne Störkraft $F_{z,d0,\text{exp}}$ als Punkt, Fall B1a, für die Störkräfte $F_{z,d15,\text{exp}}$, $F_{z,d36,\text{exp}}$ und $F_{z,d54,\text{exp}}$ als zusammenlaufende Spirale zur vorausgelenkten Ruhelage $q_{v,\text{exp}}$ dargestellt, Fälle B1b bis B1d, Abbildung 6.7 unten. Mit zunehmender Störkraft werden die modalen Auslenkungen und Geschwindigkeiten anfangs größer und laufen in der Ruhelage zusammen.

Das **aktive Balkensystem** mit $F_{x,\text{un,a,exp}}$ ist stabil und wird zur modalen Auslenkung $q_{1,\text{exp}}(t) \rightarrow 0$ geregelt. Ohne Störkraft $F_{z,d0,\text{exp}} = 0 \text{ N}$ bleibt der Balken in Ruhe bei $q_{1,\text{exp}}(t) \approx 0$, Fall B1e, Abbildung 6.7 oben. Das Balkensystem erreicht die Ruhelage abhängig von der Störkraft für $F_{z,d15,\text{exp}}$ in $t_a = 0,18 \text{ s}$, Fall B1f, für $F_{z,d36,\text{exp}}$ in $t_a = 0,29 \text{ s}$, Fall B1g und für $F_{z,d54,\text{exp}}$ in $t_a = 0,32 \text{ s}$, Fall B1h, Abbildung 6.7 oben.

Im Phasenportrait ist für das aktive Balkensystem mit $F_{x,\text{un,a,exp}}$ in Fall B1e der Verlauf als Punkt im Ursprung $q_{1,\text{exp}} = 0$ dargestellt. Die Fälle B1f, B1g und B1h verhalten sich analog zu B1b, B1c und B1d und laufen schließlich als Spirale zusammen mit linear proportional zur Störkraft $F_{z,d,\text{exp}}$ vergrößerten Schwingungsamplituden, Abbildung 6.7 unten. Tabelle 6.8 fasst die Ergebnisse zur Stabilität des Balkensystems und zur Abklingzeit t_a in allen Fällen B1a bis B1h zusammen.

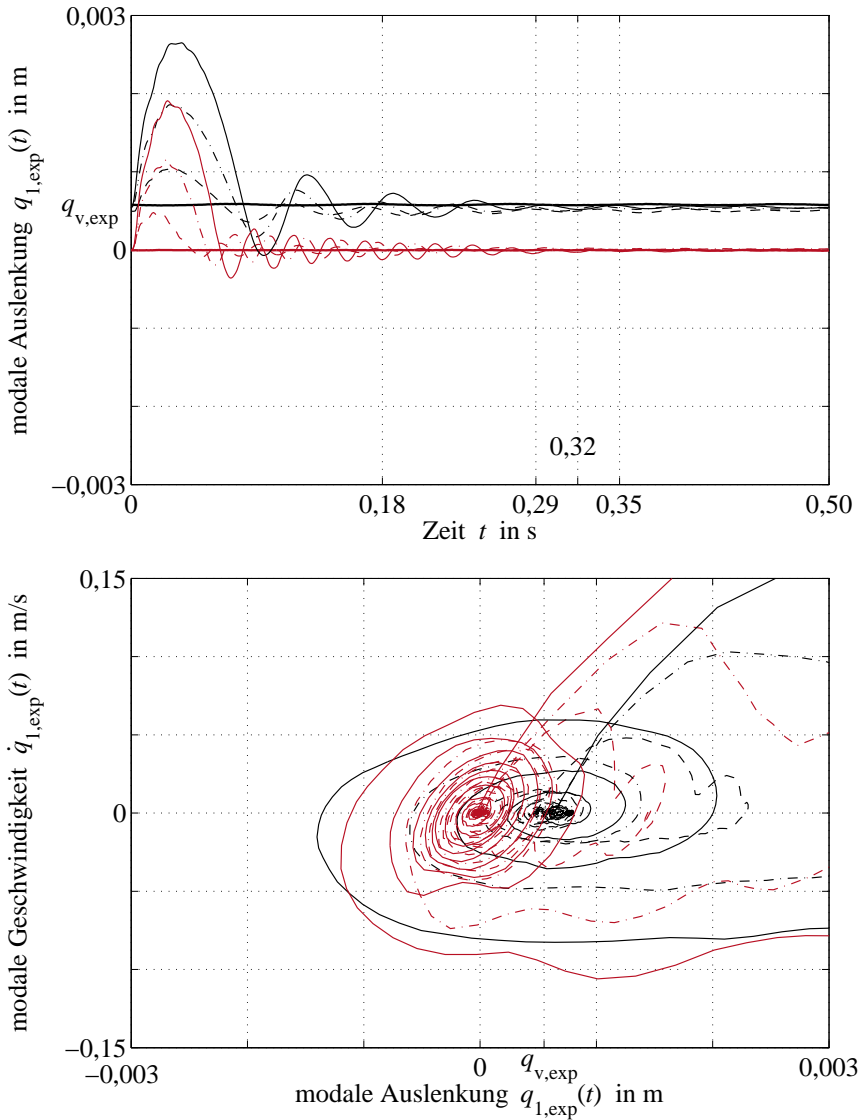


Abbildung 6.7: Fall B1, oben Zeitverläufe und unten Phasenportraits:

- a) $F_{x,un,p,exp}$, $F_{z,d0,exp}$, $q_{v,exp}$ (—), e) $F_{x,un,a,exp}$, $F_{z,d0,exp}$, $q_{v,exp}$ (—),
- b) $F_{x,un,p,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $q_{v,exp}$ (- -), f) $F_{x,un,a,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $q_{v,exp}$ (- -),
- c) $F_{x,un,p,exp}$, $F_{z,d36,exp}$, $q_{v,exp}$ (- · -), g) $F_{x,un,a,exp}$, $F_{z,d36,exp}$, $q_{v,exp}$ (- · -),
- d) $F_{x,un,p,exp}$, $F_{z,d54,exp}$, $q_{v,exp}$ (—), h) $F_{x,un,a,exp}$, $F_{z,d54,exp}$, $q_{v,exp}$ (—)

Tabelle 6.8: Experimentelle Ergebnisse Fall B1

Fall	B1a	B1b	B1c	B1d	B1e	B1f	B1g	B1h
Stabilität	stabil	stabil	stabil	stabil	stabil	stabil	stabil	stabil
t_a in s	0	0,29	0,32	0,35	0	0,18	0,29	0,32

Weder das passive noch das aktive Balkensystem knicken für $F_{x,un,exp}$ bei $F_{z,d0,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$ sowie mit $q_{v,exp}$, es ist **in allen Fällen stabil**. Das experimentelle Balkensystem verhält sich wie in den numerischen Simulationen in Fall A1 in Abbildungen 5.7 bis 5.9 vorhergesagt, jedoch mit kürzerer Abklingzeit im passiven und längerer Abklingzeit t_a im aktiven Fall und mit kleineren Schwingungsamplituden, Tabelle 5.5. Die Phasenverschiebung und Abweichungen im Ausschwingverhalten im Vergleich zu Abbildung 5.7 werden auf Unterschiede zwischen modellierter und realer Dämpfung sowie auf numerisch nicht modellierte Komponenten der realen Messkette wie DMS- und Piezoverstärker zurückgeführt.

Experimentelle Ergebnisse: Fall B2

Abbildung 6.8 zeigt den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$ und Vorauslenkung $q_{v,exp}$ bei **kritischer Knicklast** $F_{x,cr,exp} = 28,5 \text{ N}$ auf die gemessene erste modale Auslenkung $q_{1,exp}(t)$ und auf die Stabilität des passiven (p) und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems.

Das **passive Balkensystem** mit kritischer Axiallast $F_{x,cr,exp}$ ist ohne Störkraft $F_{z,d0,exp}$, Fall B2a, gerade noch stabil mit Vorauslenkung $q_{v,exp} = 0,001 \text{ m}$ und knickt mit zunehmenden Störkräften $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$ schneller aus, Fälle B2b bis B2d, Abbildung 6.8 oben. Im Phasenportrait des passiven Balkensystems mit $F_{z,d0,exp}$ und $q_{v,exp}$ ist der stabile Fall B2a als Punkt mit $q_{v,exp}$ dargestellt, Abbildung 6.8 unten. Das instabile Systemverhalten für $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$, Fälle B2b bis B2d, ist als Verlauf mit zunehmenden modalen Auslenkungen und Geschwindigkeiten dargestellt und mit zunehmender Störkraft steiler, Abbildung 6.8 unten.

Das **aktive Balkensystem** mit kritischer Axiallast $F_{x,cr,exp}$ mit $F_{z,d0,exp}$, $F_{z,d15,exp}$ und $F_{z,d36,exp}$ wird stabilisiert und knickt nicht, Fall B2e bis B2g, Abbildung 6.8 oben. Für $F_{z,d54,exp}$ stabilisiert das aktive Balkensystem gerade nicht mehr und knickt aus, Fall B2h, Tabelle 6.9, Abbildung 6.8 oben.

Im Phasenportrait ist Fall B2e für $F_{z,d0,exp}$ als Punkt im Ursprung dargestellt, Abbildung 6.8 unten. Das aktive Balkensystem mit $F_{z,d15,exp}$ und $F_{z,d36,exp}$ ist stabil und wird als zusammenlaufende Spirale dargestellt, Fälle B2f und B2g, das Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d54,exp}$ knickt aus, Fall B2h, Abbildung 6.8 unten. Tabelle 6.9 fasst die Ergebnisse zur Stabilität des Balkensystems und der Abklingzeit t_a für das stabile System bzw. die Zeit t_b zum Ausknicken für das instabile System zusammen.

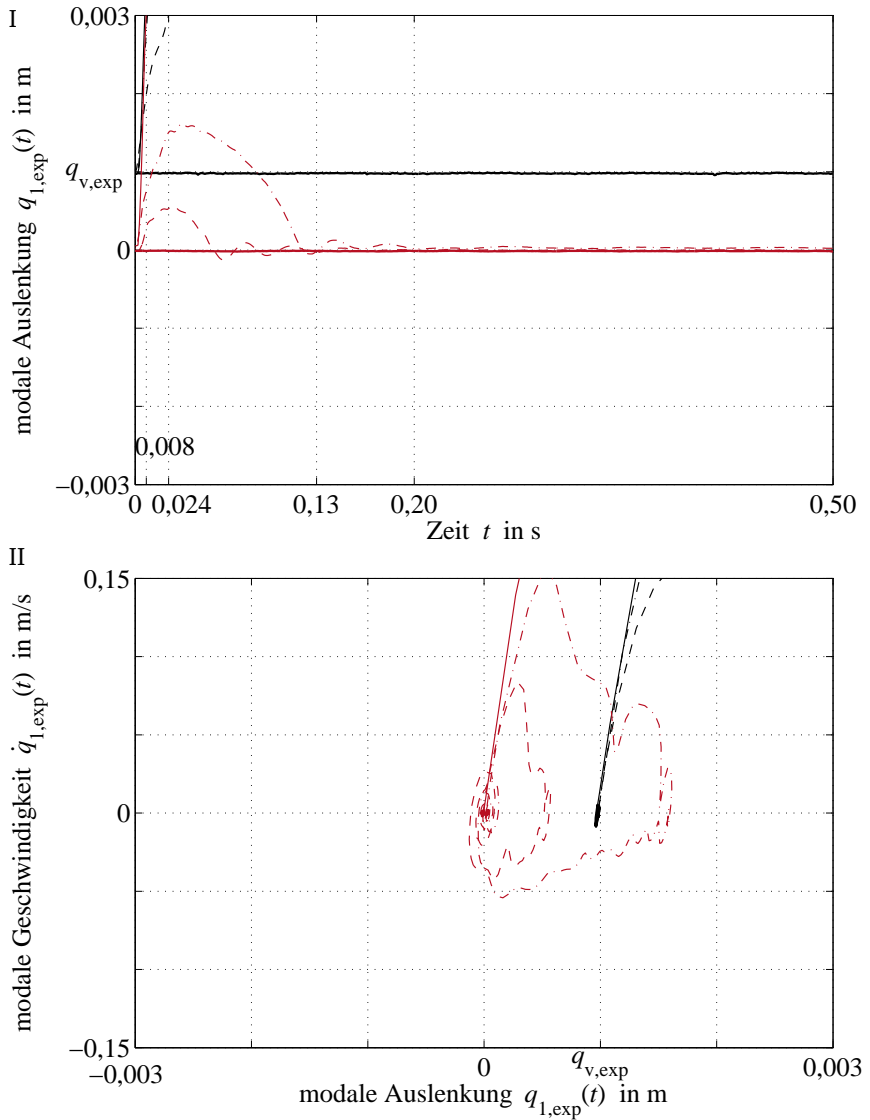


Abbildung 6.8: Fall B2, oben Zeitverläufe und unten Phasenportraits:

- a) $F_{x,cr,p,exp}$, $F_{z,d0,exp}$, $q_{v,exp}$ (—), e) $F_{x,cr,a,exp}$, $F_{z,d0,exp}$, $q_{v,exp}$ (—),
b) $F_{x,cr,p,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $q_{v,exp}$ (—), f) $F_{x,cr,a,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $q_{v,exp}$ (—),
c) $F_{x,cr,p,exp}$, $F_{z,d36,exp}$, $q_{v,exp}$ (—), g) $F_{x,cr,a,exp}$, $F_{z,d36,exp}$, $q_{v,exp}$ (—),
d) $F_{x,cr,p,exp}$, $F_{z,d54,exp}$, $q_{v,exp}$ (—), h) $F_{x,cr,a,exp}$, $F_{z,d54,exp}$, $q_{v,exp}$ (—)

Tabelle 6.9: Experimentelle Ergebnisse Fall B2

Fall	B2a	B2b	B2c	B2d	B2e	B2f	B2g	B2h
Stabilität	stabil	instabil	instabil	instabil	stabil	stabil	stabil	instabil
t_a, t_b in s	0	0,024	0,009	0,007	0	0,130	0,200	0,008

Das passive Balkensystem ist für $F_{x,cr,p,exp}$ **stabil** mit $F_{z,d0,exp}$, Fall B2a, anders als in der numerischen Simulation, Fall A2a, Abbildung 5.10. Dieser Effekt wird der Reibung in der gelenkigen Lagerung ③ zugeschrieben, Abbildung 6.1. Das Balkensystem mit den Störkräften $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$, Fälle B2b bis B2d, hingegen knickt, wie in der numerischen Simulation vorhergesagt, Fälle A2b bis A2d. Das aktive Balkensystem wird stabilisiert in der numerischen Simulation und Experimenten für $F_{z,d0,exp}$, $F_{z,d15,exp}$ und $F_{z,d36,exp}$, Fälle B2e bis B2g und A2e bis A2g. Für $F_{z,d54,exp}$ hingegen ist das experimentelle aktive Balkensystem bereits **instabil**, Fall B2h, während das numerisch simulierte Balkensystem für die etwas kleinere Axiallast $F_{x,cr,num} = 27,5\text{N}$ noch stabilisiert wird, Fall A2h, Abbildung 5.10. Die Phasenverschiebung und Abweichungen im Ausschwingverhalten im Vergleich zu Abbildung 5.10 werden auf Unterschiede zwischen modellierter und realer Dämpfung sowie auf numerisch nicht modellierte Komponenten der realen Messkette wie DMS- und Piezoverstärker zurückgeführt.

Experimentelle Ergebnisse: Fall B3

Abbildung 6.9 zeigt den Einfluss unterschiedlicher lateraler Störkräfte $F_{z,d0,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$ und Vorauslenkung $q_{v,exp}$ bei **überkritischer Axiallast** $F_{x,ue,exp} = 41,5\text{N}$ auf die gemessene erste modale Auslenkung $q_{1,exp}(t)$ und auf die Stabilität des passiven (p) und aktiv (a) stabilisierten Balkensystems.

Die Verläufe des **passiven Balkensystems** mit überkritischer Axiallast $F_{x,ue,p,exp}$ sind nicht in Abbildung 6.9 zu sehen, da das passive Balkensystem bereits während der schrittweisen Belastung bei Axiallasten $F_{x,cr,p,exp} < F_x < F_{x,ue,p,exp}$ ausgeknickt ist, Fälle B3a bis B3d. Zum Beginn der Messung war das passive Balkensystem bereits ausgeknickt und lag am mechanischen Anschlag bei ca. $q_{1,exp} \approx 0,017\text{m}$ an. Die Versuche mit Pendelschlag wurden am bereits ausgeknickten Balkensystem nicht durchgeführt.

Das **aktive Balkensystem** mit überkritischer Axiallast $F_{x,ue,a,exp}$ kann experimentell nicht mehr stabilisiert werden und knickt in allen Fällen B3e bis B3h, Abbildung 6.9 oben. Das Balkensystem erreicht die kritische Auslenkung $q_{1,exp} = 0,003\text{m}$ abhängig von der Störkraft für $F_{z,d0,exp}$ in $t_b = 0,015\text{s}$, Fall B3e, für $F_{z,d15,exp}$ in $t_b = 0,015\text{s}$, Fall B3f, für $F_{z,d36,exp}$ in $t_b = 0,017\text{s}$, Fall B3g und für $F_{z,d54,exp}$ in $t_b = 0,013\text{s}$, Fall B3h. Knicken wird im Vergleich zum passiven Balkensystem zwar verzögert, jedoch nicht verhindert.

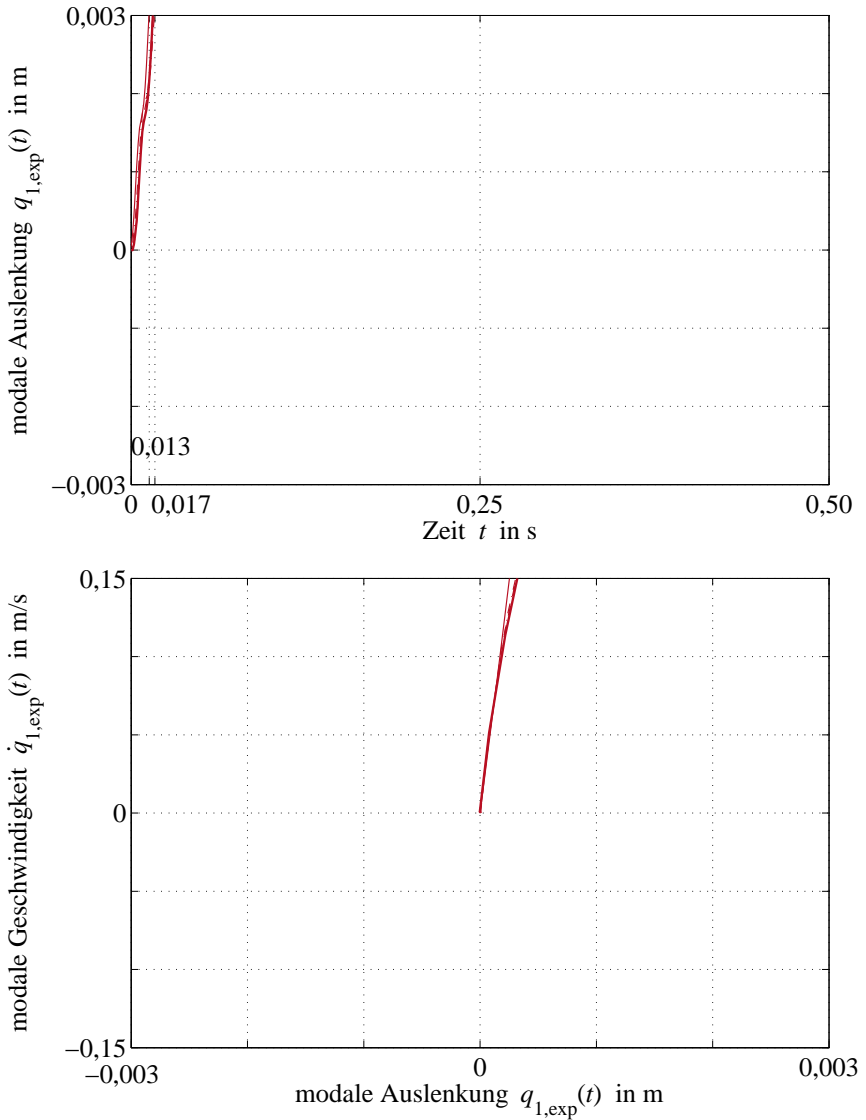


Abbildung 6.9: Fall B3, oben Zeitverläufe und unten Phasenportraits:

- a) $F_{x,ue,p,exp}, F_{z,d0,exp}, q_{v,exp}$ (—), e) $F_{x,ue,a,exp}, F_{z,d0,exp}, q_{v,exp}$ (—),
b) $F_{x,ue,p,exp}, F_{z,d15,exp}, q_{v,exp}$ (— —), f) $F_{x,ue,a,exp}, F_{z,d15,exp}, q_{v,exp}$ (— —),
c) $F_{x,ue,p,exp}, F_{z,d36,exp}, q_{v,exp}$ (— · —), g) $F_{x,ue,a,exp}, F_{z,d36,exp}, q_{v,exp}$ (— · —),
d) $F_{x,ue,p,exp}, F_{z,d54,exp}, q_{v,exp}$ (— · —), h) $F_{x,ue,a,exp}, F_{z,d54,exp}, q_{v,exp}$ (— · —)

Im Phasenportrait ist erkennbar, dass die modale Auslenkungen und Geschwindigkeiten des aktiven Balkensystems mit $F_{x,ue,a,exp}$ kontinuierlich zunehmen, was das Ausknicken beschreibt, Fälle B3e bis B3h, Abbildung 6.9 unten. Damit verhält sich das experimentelle System anders als in der numerischen Simulation, in der das Balkensystem in eine Gegenbewegung versetzt wird und aufschwingt bis es schließlich knickt, Fälle A3e bis A3h, Abbildung 5.11 unten. Das verschiedene Zeitverhalten wird auf Unterschiede zwischen der numerisch modellierten und realen Dämpfung zurückgeführt, die an der Grenze der Stabilisierbarkeit $F_{x,ue,a,exp}$ selbst im geschlossenen Regelkreis nicht experimentell abgeglichen werden konnten.

Tabelle 6.10 fasst die Ergebnisse zur Stabilität des Balkensystems und zur Zeit bis zum Ausknicken für das instabile System zusammen.

Tabelle 6.10: Experimentelle Ergebnisse Fall B3

Fall	B3a	B3b	B3c	B3d	B3e	B3f	B3g	B3h
Stabilität	instabil	instabil	instabil	instabil	instabil	instabil	instabil	instabil
t_b in s	—	—	—	—	0,015	0,015	0,017	0,013

Das passive und aktive experimentelle Balkensystem sind für $F_{x,ue,exp}$ **in allen Fällen instabil**, B3a bis B3h und knicken trotz Versuch der aktiven Stabilisierung. Die Zeiten zum Ausknicken $0,013 < t_b < 0,020$ sind ähnlich zu denen aus der numerischen Simulation $0,012 < t_b < 0,026$, Tabelle 5.7 und Abbildung 5.11.

6.6 Stichprobenversuche der aktiven Stabilisierung

Bisher wurden einzelne Zeitverläufe des Knickverhaltens in der numerischen und experimentellen Simulation des passiven und aktiven Balkensystems gezeigt, Abschnitte 5.6 und 6.5. Nachfolgend wird in Stichprobenversuchen die Wiederholbarkeit des experimentellen Knickverhaltens für das passive und aktive Balkensystem statistisch abgesichert. Tabelle 6.11 zeigt eine Übersicht der Stichprobenversuche für jeden durchgeführten Lastfall.

Um einen quantitativen Unterschied zwischen zwei Stichproben zuverlässig dektieren zu können, in diesem Fall zwischen der gemessenen ersten modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ aus einer Versuchsreihe am passiven und einer Versuchsreihe am aktiven Balkensystem, ist es notwendig, eine ausreichende Anzahl an Versuchen durchzuführen. In der numerischen Simulation wurde als Vorauslenkung $q_{v,num} = 0,0004 \text{ m}$ angenommen, Abschnitt 5.6. In allen Experimenten ist die Vorauslenkung $q_{v,exp} > 0,0004 \text{ m}$ und die Auslenkung bei Knickversagen $q_b = q_{1,exp} \gg 0,0004 \text{ m}$.

Tabelle 6.11: Versuchsanzahl für jeden Lastfall aus Axiallast $F_{x,\text{exp}}$ und Störkraft $F_{z,d,\text{exp},p/a}$ für das passive/aktive System in Abbildungen 6.10 bis 6.13

Axiallast $F_{x,\text{exp}}$ in N	Anzahl der Versuche für jede experimentelle Störkraft							
	$F_{z,d0,p}$ ×	$F_{z,d0,a}$ ×	$F_{z,d15,p}$ ▽	$F_{z,d15,a}$ ▽	$F_{z,d36,p}$ ◇	$F_{z,d36,a}$ ◇	$F_{z,d54,p}$ △	$F_{z,d54,a}$ △
23,5	31	31	9	9	9	9	9	9
24,5	31	31	9	9	9	9	9	9
25,5	31	31	9	9	9	9	9	9
26,5	31	31	9	9	9	9	9	9
27,5	31	31	9	9	9	9	9	9
28,5	31	31	9	9	9	9	9	9
29,5	31	31	9	9	9	9	9	9
30,5	31	31	9	9	9	9	9	9
31,5	—	31	—	9	—	9	—	9
32,5	—	31	—	9	—	9	—	9
33,5	—	31	—	9	—	9	—	9
34,5	—	31	—	9	—	9	—	9
35,5	—	31	—	9	—	9	—	9
36,5	—	31	—	9	—	9	—	9
37,5	—	31	—	9	—	9	—	9
38,5	—	31	—	9	—	9	—	9
39,5	—	31	—	9	—	9	—	9
40,5	—	31	—	9	—	9	—	9
41,5	—	31	—	9	—	9	—	9
Summe	248	589	72	171	72	171	72	171
Abbildung	6.10		6.11		6.12		6.13	

Der kleinste zu detektierende Unterschied der Mittelwerte aus zwei Versuchsreihen beträgt als konservative Annahme $|\mu_1 - \mu_2| = 0,0004\text{ m}$. Für die benötigte Versuchsanzahl ist weiterhin die maximal auftretende Standardabweichung σ relevant. Die Abbildungen 6.10b bis 6.13b zeigen die Standardabweichungen für jede Axiallast für das passive und das aktive Balkensystem. Nach dem Zusammenhang

$$\text{Versuchsanzahl} = \frac{(4m)^2}{2(|\mu_1 - \mu_2|/\sigma)^2}, \quad (6.8)$$

[35], wird die Versuchsanzahl mit $m = 2$ für die Unterscheidung zweier streuender Werte, also der gemessenen ersten modalen Auslenkung des passiven und des aktiven Balkensystems bei gleicher Axiallast ermittelt.

Mit diesen Werten ergibt sich nach (6.8) eine Mindestversuchszahl von 9. Die Anzahl von 31 Versuchen pro Lastfall wurde für das Balkensystem ohne Störkraft $F_{z,d0,exp} = 0$ gewählt, um eine erweiterte Datenbasis zu erhalten. Für die anschließenden Versuche mit den Störkräften $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$ ist die Anzahl von 9 Versuchen pro Lastschritt ausreichend, um eine statistisch hinreichende Aussage zum Knickverhalten des Balkens zu machen, Tabelle 6.11.

Graphisch wird diese Aussage dadurch gestützt, dass sich in den Abbildungen 6.10b bis 6.13b die Streubalken der Standardabweichungen σ jeweils bei gleicher Axiallast für das passive und aktive Balkensystem niemals überschneiden.

Überkritische Lasten $F_{x,exp} > 30,5\text{ N}$ werden nur am **aktiven** Balkensystem untersucht, da das **passive** Balkensystem bereits bei $F_{x,exp} = 30,5\text{ N}$ immer bis zum Anschlag ausgeknickt ist. Damit ergibt sich insgesamt eine Versuchszahl von 1566 randomisiert durchgeführten Versuchen, d. h. für jeden Versuch wurden die Axiallast und die Regelung zufällig eingestellt, um systematische Fehler z. B. durch Auflegen der Lasten auszuschließen.

Für jeden einzelnen Versuch wird das Zeitsignal der modalen Auslenkung mit der Dauer $T = 6\text{ s}$ aufgezeichnet. Eine etwaige Störkraft wirkt in der ersten Sekunde mittels Pendelschlag. Das Zeitsignal wird über alle Zeitschritte von $t = 2\text{ s}$ bis 6 s gemittelt, in dem das Balkensystem schwingungsberuhigt ist bzw. bereits ausgeknickt ist und ggf. am Anschlag anliegt, um den Einfluss des Messrauschens zu reduzieren. So ergibt sich für die Vergleichsgröße modale Auslenkung $q_{1,exp}$ ein diskreter Wert pro Versuch.

Stichprobenversuche ohne laterale Störkraft $F_{z,d0,exp} = 0$ bei steigender Axiallast
 $F_{x,un,exp} \leq F_{x,exp} \leq F_{x,ue,exp}$

Zunächst wird die Stabilisierung des aktiven Balkensystems untersucht. Die Vor- auslenkung des Balkens beträgt fertigungs- bzw. montagebedingt $q_{v,exp} \approx 0,0004\text{ m}$ ohne Wirkung der Axiallast. Für den Belastungsfall ohne Störkraft, also $F_{z,d0,exp}$, werden für das passive und das aktive Balkensystem je 31 Stichprobenversuche zu jeder Axiallast durchgeführt, Tabelle 6.11. Abbildung 6.10a zeigt die zeitlich gemittelten modalen Auslenkungen $q_{1,exp}$ der ersten kritischen Schwingungseigenform für das axial belastete passive und aktive Balkensystem. Es entspricht dem theoretischen Verzweigungsdiagramm aus Abbildung 2.1b bzw. 3.3.

Jeder Wert der erreichten modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ der 31 Versuche und je Lastschritt für $F_{x,un,exp} \leq F_{x,exp} \leq F_{x,ue,exp}$ für das passive Balkensystem ist mit jeweils einem (×) gekennzeichnet, Abbildung 6.10a. Das Balkensystem ist zunächst durch die Masse (4) mit $F_{x,un}$ belastet, Abbildung 6.2a. Daher beginnen die experimentellen Daten in Abbildung 6.10 auch erst bei dieser Last, Punkt A.

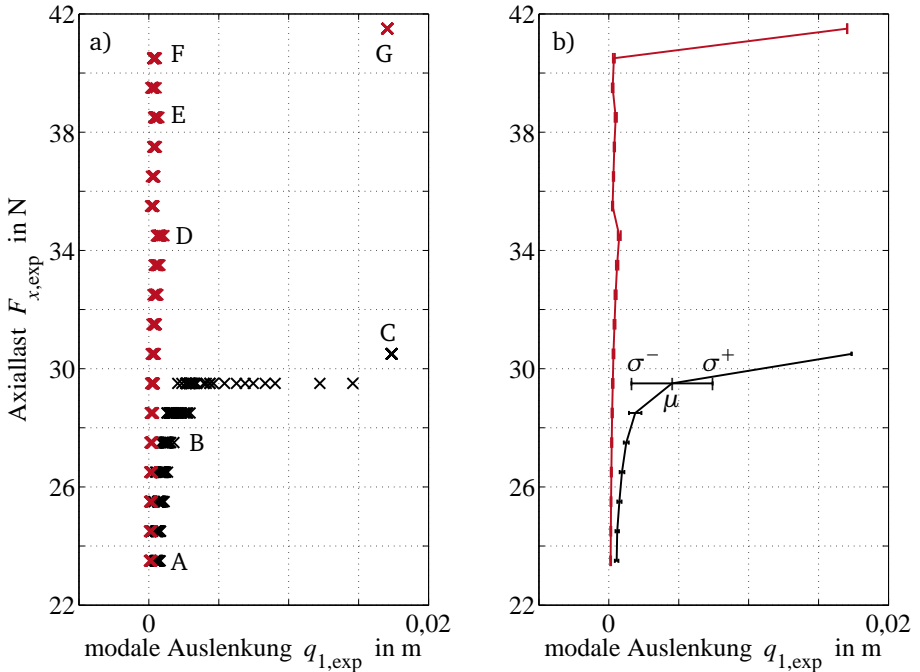


Abbildung 6.10: Modale Auslenkungen über Axiallast $F_{x,un,exp} \leq F_{x,exp} \leq F_{x,ue,exp}$ mit Störkraft $F_{z,d0,exp}$ a) $q_{1,exp}$ für jeden der 31 Versuche pro Lastschritt am passiven (×) und aktiven Balkensystem (×), b) Mittelwerte $\mu(q_{1,exp})$ und Standardabweichung $\pm\sigma(q_{1,exp})$ der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ für passives (—) und aktives System (—)

Durch Auflegen von Zusatzmassen ⑨ wird die Axiallast in diskreten Schritten von $\Delta F_{x,exp} = 1 \text{ N}$ erhöht, Abbildung 6.2b. Für das passive System mit vorgespannten Aktuatoren ist die modale Auslenkung $q_{1,exp}$ infolge der Vorauslenkung $q_{v,exp} \approx 0,0004 \text{ m}$ endlich und steigt mit der Axiallast an. Bei $F_{x,cr,exp} = 27,5 \text{ N}$ ist das Balkensystem bereits signifikant ausgelenkt, Punkt B. Durch weitere Belastung knickt das Balkensystem aus und erreicht bei $F_{x,exp} = 30,5 \text{ N}$ den mechanischen Anschlag bei $q_{1,exp} = 0,017 \text{ m}$, Punkt C in Abbildung 6.10a.

Jeder Wert der erreichten modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ der 31 Versuche und je Lastschritt für $F_{x,un,exp} \leq F_{x,exp} \leq F_{x,ue,exp}$ am aktiv stabilisierten Balkensystem ist mit jeweils einem (×) markiert. In dieser Versuchsreihe kommen die Regler $K_{LQR,1-3}$ in Abhängigkeit der Axiallast $F_{x,exp}$ zum Einsatz, Tabelle 6.4. Für Axiallasten $F_{x,un} = 23,5 \text{ N}$ bis $34,5 \text{ N}$ stabilisiert $K_{LQR,1}$ das aktive Balkensystem. Wenn durch Auflegen von Zusatzmassen $F_{x,exp} = 34,5 \text{ N}$ erreicht ist, wird manuell auf

Regler $K_{LQR,2}$ umgeschaltet, Punkt D. Das gleiche Vorgehen wird bei $F_{x,exp} = 38,5\text{ N}$ mit $K_{LQR,3}$ wiederholt, Punkt E in Abbildung 6.10a.

Für $F_{x,cr,exp} < F_{x,exp} = 40,5\text{ N} < F_{x,ue,exp}$ wird das Balkensystem noch stabilisiert, Punkt F. Bei Erhöhung auf $F_{x,ue,exp} = 41,5\text{ N}$ knickt das aktive Balkensystem in allen Versuchen aus und erreicht den Anschlag bei $q_{1,exp} = 0,017\text{ m}$ ohne plastische Verformung, Punkt G in Abbildung 6.10a. Die Axiallast, bei der das passive Balkensystem die kritische modale Auslenkung $q_{1,exp} = 0,003\text{ m}$ annimmt, bei der das System nicht mehr stabilisiert wird und als ausgeknickt gilt, beträgt $F_{x,cr,exp} = 29,5\text{ N}$. Das aktive Balkensystem knickt erstmals bei $F_{x,ue,exp} = 41,5\text{ N}$. Das entspricht einer Erhöhung der ertragbaren axialen Last um ca. 40%.

Abbildung 6.10b stellt Mittelwert $\mu(q_{1,exp})$ und Standardabweichung $\sigma(q_{1,exp})$ für das passive (—) und aktive Balkensystem (—) dar. Die Annahme der Normalverteilung der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ der 31 Versuche für jeden Lastschritt wurde mit dem KOLMOGOROW-SMIRNOW-Hypothesentest (KS-Test) mit $\alpha = 0,05$ überprüft, [33]. Die Annahme der Normalverteilung der Versuchsergebnisse ist für alle Axiallasten sowohl für das passive als auch das aktive Balkensystem gültig. Im Gegensatz zum χ^2 -Test ist der KS-Test auch für eine kleinere Anzahl von Stichproben geeignet, [33].

Die Mittelwerte der angenommenen Normalverteilung $\mu(q_{1,exp})$ sind im aktiven Balkensystem um den Faktor 4 bis 16 kleiner als für das passive Balkensystem. Je weiter die Axiallast $F_{x,exp}$ in die Nähe der experimentell ertragbaren Axiallast $F_{x,cr,exp} = 29,5\text{ N}$ des passiven Balkensystems kommt, desto größer werden auch die Abweichungen der Mittelwerte. Die Standardabweichung $\sigma(q_{1,exp})$ verhält sich analog dazu und ist für das aktive Balkensystem um den Faktor 4 bis 48 kleiner als für das passive Balkensystem, Abbildung 6.10b.

Stichprobenversuche mit lateraler Störkraft $F_{z,d15,exp} = 0,15\text{ N}$ bei steigender Axiallast $F_{x,un,exp} \leq F_{x,exp} \leq F_{x,ue,exp}$

Abbildung 6.11 zeigt die Versuchsergebnisse der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ für das passive und aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d15,exp}$. Durch mechanisches Verspannen der Aktuatoren kann die Vorauslenkung auf $q_{v,exp} \approx 0,0001\text{ m}$ bei $F_{x,un,exp} = 23,5\text{ N}$ reduziert werden. Wie in Abbildung 6.10a streuen die Versuchswerte für die unterkritische Axiallast $F_{x,un,exp}$ am wenigsten, Punkt A in Abbildung 6.11a. Die Standardabweichungen und Mittelwerte weichen bei axialen Lasten von $F_{x,exp} = 26,5\text{ N}$ und $27,5\text{ N} < F_{x,cr,exp}$ infolge der Störkraft $F_{z,d15,exp}$ bereits deutlich von der Nulllage ab, Punkt B in Abbildung 6.11a und in Abbildung 6.11b. Bei $F_{x,exp} = 30,5\text{ N}$ ist das passive Balkensystem in allen Versuchen ausgeknickt, Punkt C in Abbildung 6.11a.

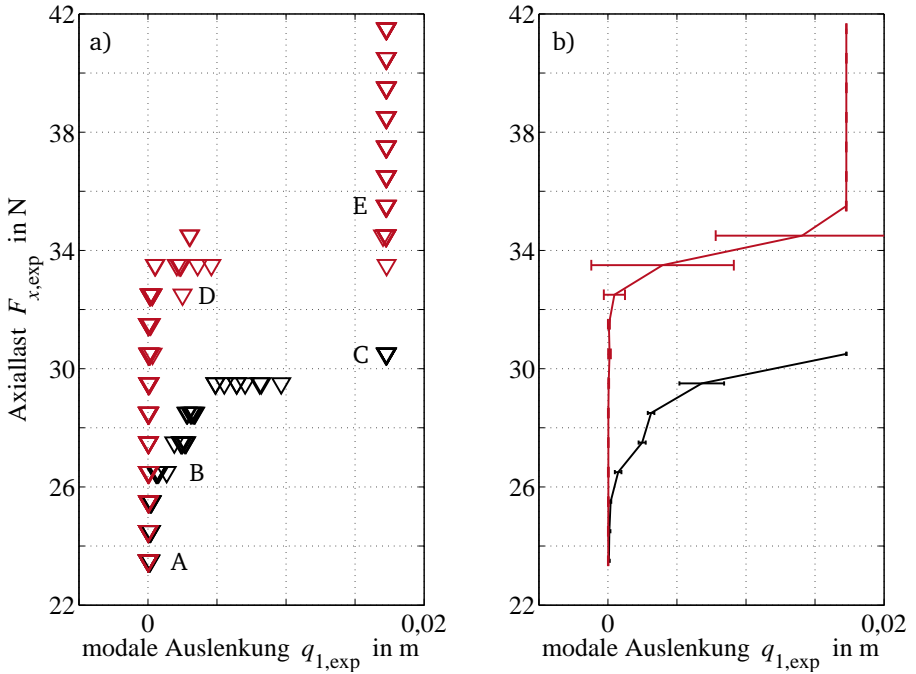


Abbildung 6.11: Modale Auslenkungen über Axiallast $F_{x,un,exp} \leq F_{x,exp} \leq F_{x,ue,exp}$ mit Störkraft $F_{z,d15,exp}$ a) $q_{1,exp}$ für jeden der 9 Versuche pro Lastschritt am passiven (∇) und aktiven Balkensystem (\blacktriangledown), b) Mittelwerte $\mu(q_{1,exp})$ und Standardabweichung $\pm\sigma(q_{1,exp})$ der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ für passives (—) und aktives System (—)

Erste deutliche Abweichungen von der Nulllage treten am aktiven Balkensystem bei $F_{x,exp} = 32,5$ N auf, Punkt D in Abbildung 6.11a. Ab $F_{x,exp} = 35,5$ N ist das aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d15,exp}$ in allen Versuchen ausgeknickt, Punkt E. Das aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d15,exp}$ knickt damit bereits bei wesentlich geringeren Lasten als das ungestörte aktive Balkensystem aus Abbildung 6.10.

Die Standardabweichung der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ ist deutlich kleiner für das aktive als für das passive Balkensystem bei gleicher Axiallast $F_{x,exp}$ und Störkraft $F_{z,d15,exp}$, Abbildung 6.11b.

Die Axiallast, bei der das passive Balkensystem die kritische modale Auslenkung $q_{1,exp} = 0,003$ m annimmt und das Balkensystem als ausgeknickt gilt, beträgt $F_{x,exp} = 28,5$ N. Das aktive Balkensystem knickt erstmals bei $F_{x,exp} = 33,5$ N. Das entspricht einer Erhöhung der ertragbaren axialen Last um ca. 18%.

Stichprobenversuche mit lateraler Störkraft $F_{z,d36,exp} = 0,36\text{ N}$ bei steigender Axiallast $F_{x,un,exp} \leq F_{x,exp} \leq F_{x,ue,exp}$

Abbildung 6.12 zeigt die Versuchsergebnisse der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ für das passive und aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d36,exp}$. Durch mechanisches Verspannen der Aktuatoren kann auch hier die Vorauslenkung auf $q_{v,exp} \approx 0,0001\text{ m}$ bei $F_{x,un,exp} = 23,5\text{ N}$ reduziert werden. Wie in Abbildung 6.10a streuen die Versuchswerte für die unterkritische Axiallast $F_{x,un,exp}$ am wenigsten, Punkt A in Abbildung 6.12a. Die Standardabweichungen und Mittelwerte weichen bei axialen Lasten von $F_{x,exp} = 26,5\text{ N} < F_{x,cr,exp}$ infolge der Störkraft $F_{z,d36,exp}$ bereits deutlich von der Nulllage ab, Punkt B in Abbildung 6.12a und in Abbildung 6.12b. Bei $F_{x,exp} = 30,5\text{ N}$ ist das passive Balkensystem in allen Versuchen ausgeknickt, Punkt C in Abbildung 6.12a.

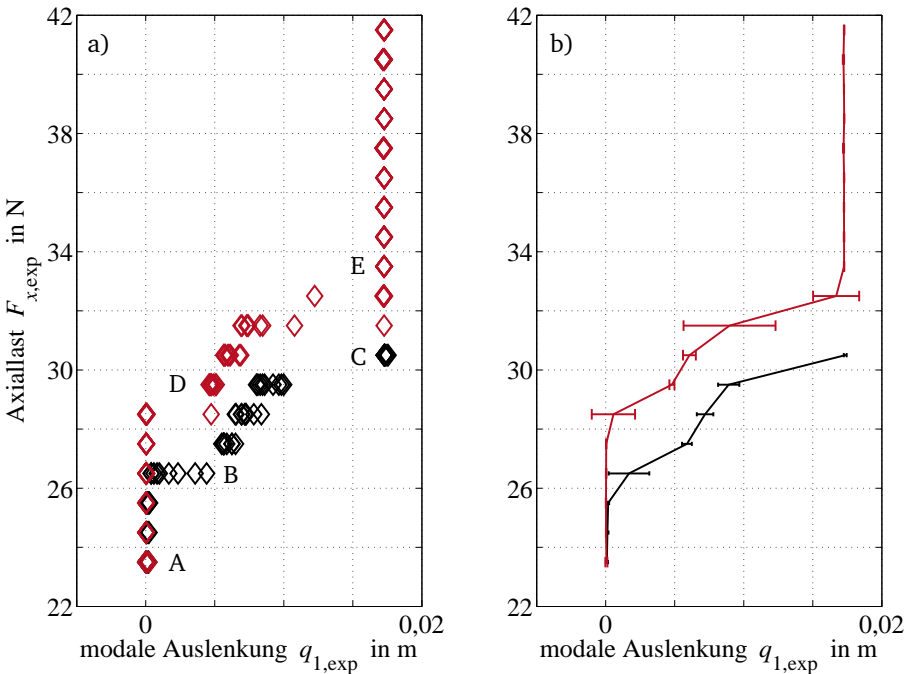


Abbildung 6.12: Modalen Auslenkungen über Axiallast $F_{x,un,exp} \leq F_{x,exp} \leq F_{x,ue,exp}$ mit Störkraft $F_{z,d36,exp}$ a) $q_{1,exp}$ für jeden der 9 Versuche pro Lastschritt am passiven (\diamond) und aktiven Balkensystem (\diamond), b) Mittelwerte $\mu(q_{1,exp})$ und Standardabweichung $\pm\sigma(q_{1,exp})$ der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ für passives (—) und aktives System (—)

Erste deutliche Abweichungen von der Nulllage treten am aktiven Balkensystem bei $F_{x,\text{exp}} = 29,5 \text{ N}$ auf, Punkt D in Abbildung 6.12a. Ab $F_{x,\text{exp}} = 33,5 \text{ N}$ ist das aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d36,\text{exp}}$ in allen Versuchen ausgeknickt, Punkt E. Das aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d36,\text{exp}}$ knickt damit bereits bei wesentlich geringeren Lasten als das ungestörte aktive Balkensystem aus Abbildung 6.10 und das aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d15,\text{exp}}$ aus Abbildung 6.11.

Die Standardabweichung der modalen Auslenkung $q_{1,\text{exp}}$ ist deutlich kleiner für das aktive als für das passive Balkensystem bei gleicher Axiallast $F_{x,\text{exp}}$ und Störkraft $F_{z,d36,\text{exp}}$, Abbildung 6.12b.

Die Axiallast, bei der das passive Balkensystem die kritische modale Auslenkung $q_{1,\text{exp}} = 0,003 \text{ m}$ annimmt und das System als ausgeknickt gilt, beträgt $F_{x,\text{exp}} = 26,5 \text{ N}$. Das aktive Balkensystem knickt bei $F_{x,\text{exp}} = 29,5 \text{ N}$. Das entspricht einer Erhöhung der ertragbaren axialen Last um ca. 11%.

Stichprobenversuche mit lateraler Störkraft $F_{z,d54,\text{exp}} = 0,54 \text{ N}$ bei steigender Axiallast $F_{x,\text{un,exp}} \leq F_{x,\text{exp}} \leq F_{x,\text{ue,exp}}$

Abbildung 6.13 zeigt die Versuchsergebnisse der modalen Auslenkung $q_{1,\text{exp}}$ für das passive und aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d54,\text{exp}}$. Durch mechanisches Verspannen der Aktuatoren kann auch hier die Vorauslenkung auf $q_{v,\text{exp}} \approx 0,0001 \text{ m}$ bei $F_{x,\text{un,exp}} = 23,5 \text{ N}$ reduziert werden. Wie in Abbildung 6.10a streuen die Versuchswerte für die unterkritische Axiallast $F_{x,\text{un,exp}}$ am wenigsten, Punkt A in Abbildung 6.13a.

Die Standardabweichungen und Mittelwerte weichen bei axialen Lasten von $F_{x,\text{exp}} = 26,5 \text{ N} < F_{x,\text{cr,exp}}$ infolge der Störkraft $F_{z,d54,\text{exp}}$ bereits deutlich von der Nulllage ab, Punkt B in Abbildung 6.13a und in Abbildung 6.13b. Bei $F_{x,\text{exp}} = 30,5 \text{ N}$ ist das passive Balkensystem in allen Versuchen ausgeknickt, Punkt C in Abbildung 6.13a. Erste deutliche Abweichungen von der Nulllage treten am aktiven Balkensystem ab $F_{x,\text{exp}} = 28,5 \text{ N}$ auf und es ist auch ausgeknickt, Punkt D in Abbildung 6.13a. Ab $F_{x,\text{exp}} = 31,5 \text{ N}$ ist das aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d54,\text{exp}}$ in allen Versuchen am Anschlag, Punkt E.

Das aktive Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d54,\text{exp}}$ knickt damit bereits bei wesentlich geringeren Lasten als das ungestörte aktive Balkensystem aus Abbildung 6.10 und das aktive Balkensystem mit Störkräften $F_{z,d15,\text{exp}}$ aus Abbildung 6.11 und $F_{z,d36,\text{exp}}$ aus Abbildung 6.12.

Die Standardabweichung der modalen Auslenkung $q_{1,\text{exp}}$ ist deutlich kleiner für das aktive als für das passive Balkensystem bei gleicher Axiallast $F_{x,\text{exp}}$ und Störkraft $F_{z,d54,\text{exp}}$, Abbildung 6.13b. Die Axiallast, bei der das passive System die kritische modale Auslenkung $q_{1,\text{exp}} = 0,003 \text{ m}$ annimmt und das System als ausgeknickt

gilt, beträgt $F_{x,\text{exp}} = 26,5 \text{ N}$. Das aktive Balkensystem knickt bei $F_{x,\text{exp}} = 28,5 \text{ N}$. Das entspricht einer Erhöhung der ertragbaren Axiallast um ca. 8%.

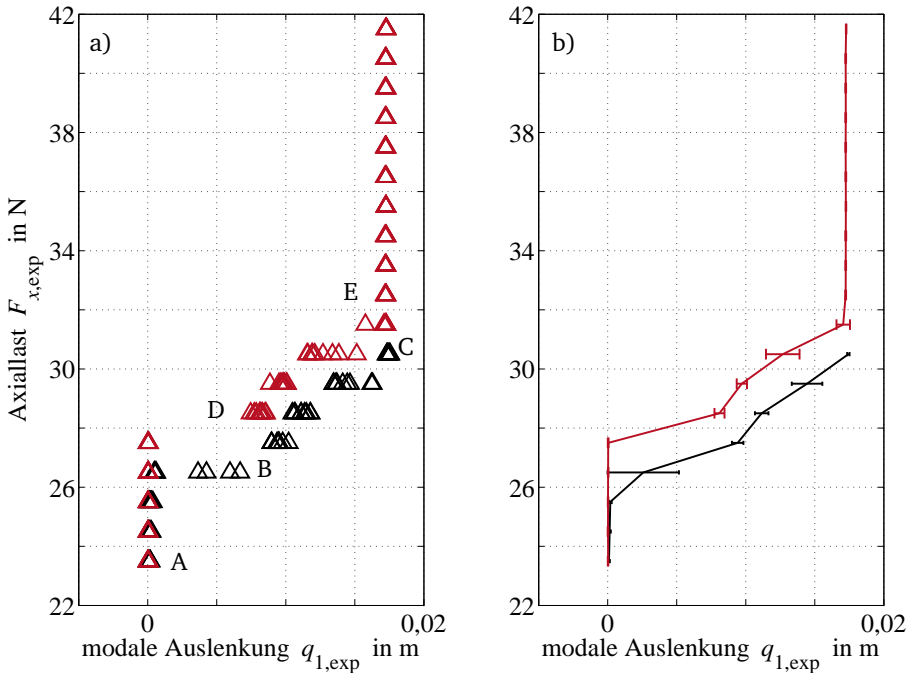


Abbildung 6.13: Modale Auslenkungen über Axiallast $F_{x,\text{un,exp}} \leq F_{x,\text{exp}} \leq F_{x,\text{ue,exp}}$ mit Störkraft $F_{z,d54,\text{exp}}$ a) $q_{1,\text{exp}}$ für jeden der 9 Versuche pro Lastschritt am passiven (\triangle) und aktiven Balkensystem (Δ), b) Mittelwerte $\mu(q_{1,\text{exp}})$ und Standardabweichung $\pm\sigma(q_{1,\text{exp}})$ der modalen Auslenkung $q_{1,\text{exp}}$ für passives (—) und aktives System (—)

6.7 Fazit zur experimentellen Erprobung der aktiven Stabilisierung

Der in diesem Kapitel vorgestellte Ansatz mit der Verwendung mehrerer stabilisierender Regler für vordefinierte Axiallasten mittels gesteuerter Adaption führt zu einer Erhöhung der experimentell ertragbaren Axiallast $F_{x,\text{cr,exp,a}}$ um ca. 40%. Der Einfluss der Störkräfte auf die modale Auslenkung $q_{1,\text{exp}}$ und die ertragbare Last $F_{x,\text{cr,exp,a}}$ des mit $q_{v,\text{exp}}$ vorausgelenkten Balkens wurde in Einzelversuchen und Stichprobenversuchen beleuchtet. Bei der Störkraft $F_{z,d15,\text{exp}}$ ist eine Erhöhung der

experimentell ertragbaren Axiallast um 18% möglich. Mit zunehmender Störkraft $F_{z,d36,exp}$ beträgt diese noch 11% und mit $F_{z,d54,exp}$ nur noch 8%.

In den Einzelversuchen mit definierten Lastfällen aus den zuvor genannten Störkräften und den drei charakteristischen Axiallasten $F_{x,un,exp}$, $F_{x,cr,exp}$ und $F_{x,ue,exp}$ wurde das strukturdynamische Verhalten in Zeitverläufen der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ und im Phasenportrait der modalen Geschwindigkeit $\dot{q}_{1,exp}$ über der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ untersucht.

Darüber hinaus konnten aus Stichprobenversuchen Informationen zur Unsicherheit in Form von Streuungen der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ für das passive und das aktive Balkensystem gewonnen werden. Mit Hilfe der letztgenannten Untersuchungen kann nicht nur eine Aussage über die Wirksamkeit der entwickelten Stabilisierungstechnologie gemacht werden, sondern auch zur Unsicherheit in der Stabilisierungstechnologie selbst. Aufgrund dieser Datenbasis wird Unsicherheit im passiven und aktiven Balkensystem im nachfolgenden Kapitel bewertet.

In früheren Arbeiten des Autors wurde ein signalbasierter Ansatz verfolgt, um das Balkensystem durch Einleitung von aktiven Gegenkräften mittels eines PID-Reglers zu stabilisieren. Mit diesem Ansatz ist experimentell ohne Störkraft eine Erhöhung der ertragbaren Axiallast um 15% möglich, [16], [18] und [21].

7 Bewertung von Unsicherheit

Nachdem in Kapitel 6 das Knickverhalten im passiven und aktiven Balkensystem sowie Unsicherheit in Form von Streuungen der experimentellen modalen Auslenkung beschrieben wurde, stellt dieses Kapitel Methoden zur Bewertung der Unsicherheit am passiven und aktiven Balkensystem zur Stabilisierung gegen Knicken vor.

Die Weibull-Analyse zur Bewertung von Unsicherheit am passiven und am aktiven Balkensystem wird in drei Schritten durchgeführt, die in den folgenden Abschnitten beschrieben werden.

Schritt 1: Ermittlung der Verteilungsfunktionen der modalen Auslenkung bei jeder einzelnen Axiallast

Schritt 2: Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeiten bei jeder Axiallast

Schritt 3: Ermittlung einer Weibullverteilung über alle Axiallasten

Diese drei Schritte werden zunächst exemplarisch für das passive Balkensystem ohne Störkraft durchgeführt, Abschnitte 7.1 bis 7.3, und anschließend auf das passive und aktive Balkensystem mit Störkräften $F_{z,d0,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$ übertragen, Abschnitt 7.4.

7.1 Ermittlung der Verteilungsfunktionen der modalen Auslenkung

Zunächst werden die Verteilungsfunktionen der modalen Auslenkung $q_{1,exp}$ exemplarisch für die acht Axiallasten $F_{x,exp} = 23,5 \text{ N}; 24,5 \text{ N}; \dots; 30,5 \text{ N}$ nach Tabelle 6.11 am experimentellen passiven Balkensystem ohne laterale Störkraft $F_{z,d0,exp}$ ermittelt, Abbildung 7.1.

Aus den Stichprobenuntersuchungen in Abschnitt 6.6 sind 31 zeitlich gemittelte modale Auslenkungen $q_{1,exp}$ bei jeder experimentellen Axiallast $F_{x,exp}$ bekannt. Diese 31 modalen Auslenkungen werden durch eine Normalverteilung NV mit Mittelwert $\mu(q_{1,exp})$ und Standardabweichung $\sigma(q_{1,exp})$ approximiert. Abbildung 7.1 zeigt die Dichtefunktion der Normalverteilung NV der modalen Auslenkungen $q_{1,exp}$ nur für die Axiallast $F_{x,exp} = 29,5 \text{ N}$ sowie die experimentell ermittelten modalen

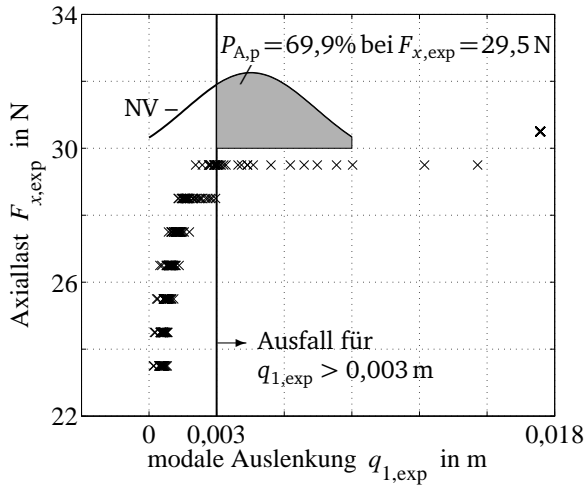


Abbildung 7.1: Ermittlung der Verteilungsfunktion anhand der experimentellen Versuchsdaten für $F_{x,exp} = 29,5$ N und $F_{z,d0,exp}$, vgl. [22]

Auslenkungen $q_{1,exp}$ für die acht Axiallasten $F_{x,exp} = 23,5$ N; $24,5$ N; ...; $30,5$ N nach Tabelle 6.11 des passiven Balkensystems.

Nach dem KOLMOGOROW-SMIRNOW-Hypothesentest mit $\alpha = 0,05$ ist die Annahme der Normalverteilung der jeweils 31 experimentellen modalen Auslenkung gültig für alle acht Axiallasten $F_{x,exp}$.

Ein Ausfall liegt vor, wenn ein Versagen durch Knicken eintritt. Das Balkensystem gilt als ausgeknickt für die in Kapitel 6 geltende kritische modale Auslenkung $q_{1,exp} > 0,003$ m, ab der die aktive Stabilisierung nicht mehr greift.

Unter Annahme normalverteilter modaler Auslenkung $q_{1,exp}$ aus Abbildung 7.1 beträgt die Ausfallwahrscheinlichkeit $P_{A,p} = 69,9\%$ bei $F_{x,exp} = 29,5$ N und $F_{z,d0,exp} = 0$ N am passiven Balkensystem. Die grau gefärbte Fläche unter der Dichtefunktion der Normalverteilung NV in Abbildung 7.1 entspricht genau dieser Ausfallwahrscheinlichkeit.

7.2 Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeiten bei jeder Axiallast

Abbildung 7.2 zeigt die ermittelten Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_{A,p}(F_{x,exp})$ aus Abbildung 7.1 über der experimentellen Axiallast $F_{x,exp}$ des passiven Balkensystems mit $P_{A,p}(27,5$ N) = 0,001, $P_{A,p}(28,5$ N) = 0,006, $P_{A,p}(29,5$ N) = 0,699 und $P_{A,p}(30,5$ N) = 0,999 als Stufen (—).

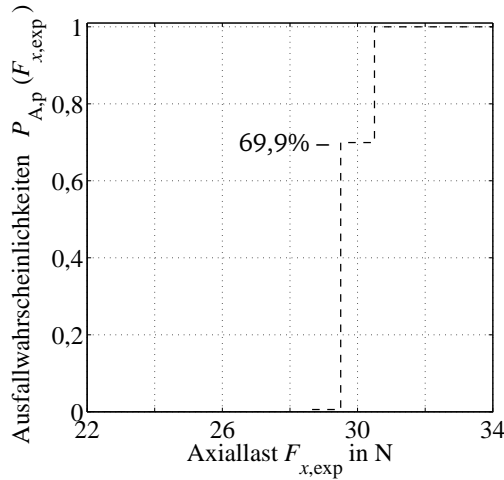


Abbildung 7.2: Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_{A,p}(F_{x,exp})$ des passiven Balkensystems über Axiallast $F_{x,exp}$ (—)

Tabelle 7.1 zeigt zusammengefasst die Wertepaare aus Axiallast $F_{x,exp}$ und Ausfallwahrscheinlichkeit $P_{A,p}(F_{x,exp})$ im Bereich zwischen 0,001 und 0,999 aus Abbildung 7.2.

Tabelle 7.1: Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_{A,p}(F_{x,exp})$ des passiven Balkensystems ohne Störkraft

$F_{x,exp}$ in N	27,5	28,5	29,5	30,5
$P_{A,p}(F_{x,exp})$	0,001	0,006	0,699	0,999

7.3 Ermittlung der Weibullverteilung über alle Axiallasten

Für die Bewertung der Unsicherheit am aktiven Balkensystem ist es notwendig, die Vergleichbarkeit zwischen experimentellen Versuchen des passiven und das aktiven Balkensystems herzustellen. Ziel ist die kompakte Darstellung und Quantifizierung der Ausfallwahrscheinlichkeit des Knickens in Abhängigkeit von Axiallast $F_{x,exp}$ und lateraler Störkraft $F_{z,d,exp}$.

Zur Bewertung der Unsicherheit wird die aus der Zuverlässigkeitstechnik bekannte Weibullverteilung verwendet, die das Ausfallverhalten technischer Systeme beschreibt, [7]. Die Weibullverteilung ist geeignet, da sie verschiedene Ausfallarten

wie Frühausfälle, Zufallsausfälle, Ermüdungsausfälle etc. abbilden kann, [7]. Die Weibullverteilung

$$P_W(F_x) = 1 - e^{-\left(\frac{F_x}{F_{x,W}}\right)^{b_W}} \quad (7.1)$$

kann mit zwei Parametern beschrieben werden, dem Lageparameter $F_{x,W}$ und Formparameter b_W , [7]. Als statistische Variable wird die wirkende Axiallast F_x gewählt. Der **Lageparameter** $F_{x,W}$ beschreibt in Anlehnung an [7] die charakteristische ertragbare Axiallast, bei der das Balkensystem in 63,2% der Stichprobenversuche ausgeknickt ist, $P_W(F_{x,W}) = 0,632$. Der **Formparameter** b_W legt die Kurvenform der Weibullverteilung fest und ist ein Maß für die Streuung, d. h. Unsicherheit des Knickversagens beim passiven und beim aktiven Balkensystem in Abhängigkeit von der Axiallast und der lateralen Störkraft. Je größer der Formparameter b_W , desto kleiner die Streuung der ertragbaren Axiallast $F_{x,W}$.

Die zweiparametrische Weibullverteilung entspricht einer Geraden im Weibull-wahrscheinlichkeitspapier mit logarithmisch skaliertter Abszisse F_x und doppelt-logarithmisch skaliertter Ordinate $P_W(F_x)$, [7]. Bei zwei bekannten Axiallast-Ausfallwahrscheinlichkeit-Wertepaaren F_1 mit $P_A(F_1)$ und F_2 mit $P_A(F_2)$ können der Formparameter b_W und der Lageparameter $F_{x,W}$ berechnet werden,

$$b_W = \frac{\ln[-\ln(1 - P_A(F_2))] - \ln[-\ln(1 - P_A(F_1))]}{\ln(F_2) - \ln(F_1)}, \quad (7.2)$$

$$F_{x,W} = e^{\left(\ln(F_1) + \frac{\ln[-\ln(1 - P_A(F_{x,W}))] - \ln[-\ln(1 - P_A(F_1))]}{b_W} \right)}. \quad (7.3)$$

Im Falle von mehr als zwei Wertepaaren, wie in Tabelle 7.1, wird eine lineare Regression der logarithmisch skalierten Weibull-Geradengleichung der Wertepaare mittels kleinster Fehlerquadrate berechnet, um zwei Wertepaare zu erhalten, [7].

Abbildung 7.3a zeigt die Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A(F_{x,\text{exp}})$ aus Abbildung 7.2 (---) und den kontinuierlichen Verlauf der Weibullverteilung $P_W(F_{x,\text{exp}})$ (—) aus den experimentellen Versuchen über alle Axiallasten $F_{x,\text{exp}}$. Diese Verläufe sind exemplarisch für das passive Balkensystem ohne Störkraft berechnet.

Abbildung 7.3b zeigt die Belastbarkeit durch die Axiallast F_x anhand der Dichtefunktion $p_W(F_x) = dP_W(F_x)/dF_x$ mit $P_W(F_x)$ nach (7.1) der Weibullverteilungen am experimentellen passiven und aktiven Balkensystem. Damit wird die Darstellung aus Abbildung 1.1 zu Beginn der vorliegenden Arbeit wieder aufgegriffen, in der Erwartungswerte und Streuungen der Belastung und Belastbarkeit gezeigt sind. Je schmaler die Dichtefunktion ist, desto geringer ist die Streuung.

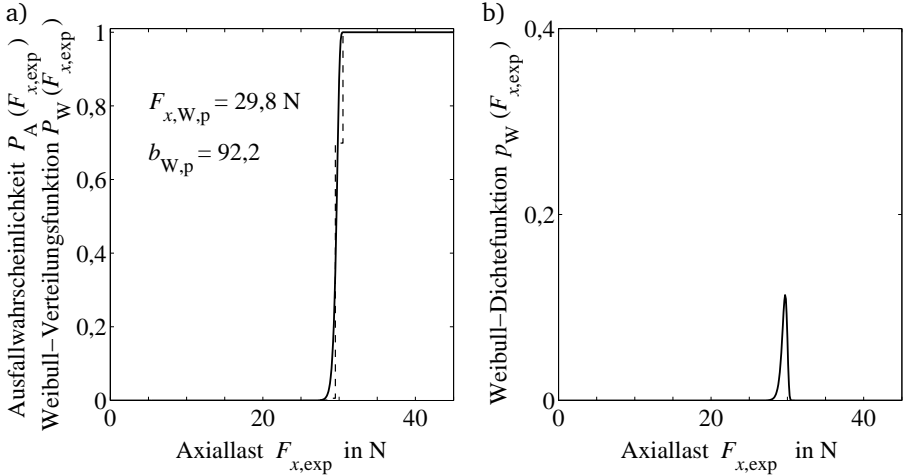


Abbildung 7.3: a) Weibull-Verteilungsfunktion (—) $P_{W,p}(F_{x,\text{exp}})$ auf Basis der Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_{A,p}(F_{x,\text{exp}})$ (---) des passiven Balkensystems über Axiallast $F_{x,\text{exp}}$, b) Weibull-Dichtefunktion $p_{W,p}(F_{x,\text{exp}})$

7.4 Ermittlung der Weibullverteilungen für Balkensystem mit Störkräften

Dieser Abschnitt zeigt die Weibull-Analyse des passiven und aktiven Balkensystems für die Axiallasten $F_{x,\text{un},\text{exp}} = 23,5 \text{ N}$ bis $F_{x,\text{ue},\text{exp}} = 41,5 \text{ N}$ in diskreten Schritten $\Delta F_{x,\text{exp}} = 1 \text{ N}$ für alle untersuchten Störkräfte $F_{z,d0,\text{exp}} = 0 \text{ N}$, $F_{z,d15,\text{exp}} = 0,15 \text{ N}$, $F_{z,d36,\text{exp}} = 0,36 \text{ N}$ und $F_{z,d54,\text{exp}} = 0,54 \text{ N}$ mit Vorauslenkung $q_{v,\text{exp}}$ aus Kapitel 6, wie im Versuchsplan in Tabelle 6.11 aufgeführt. Tabelle 7.2 zeigt die für die Weibull-Analyse zugrunde liegenden Wertepaare aus Axiallasten $F_{x,\text{exp}}$ Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A(F_{x,\text{exp}})$ die aus den experimentellen Untersuchungen in Abbildungen 6.10 bis 6.13 ermittelt wurden, wie in den Abschnitten 7.1 bis 7.3 beschrieben.

Die Wertepaare in Tabelle 7.2 von Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_{A,p/a}(F_{x,\text{exp}})$ und Axiallasten $F_{x,\text{exp}}$ werden für jede der vier Störkräfte jeweils für das passive (p) und das aktive Balkensystem (a) nach Tabelle 6.11 als insgesamt acht Weibull-Verteilungen quantitativ zusammengefasst und anschließend diskutiert. Die Weibull-Verteilungen bieten eine kompakte Darstellung der durchgeführten Versuche der Abbildungen 6.10 bis 6.13 in Kapitel 6 und die nachträgliche Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeiten für jede Axiallast $F_{x,\text{exp}}$.

Tabelle 7.2: Wertepaare der Axiallasten $F_{x,\text{exp}}$ in N und zugehörigen Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A(F_{x,\text{exp}})$ des passiven und aktiven Balkensystems für die vier untersuchten Störkräfte $F_{z,\text{d0,exp}} = 0\text{ N}$, $F_{z,\text{d15,exp}} = 0,15\text{ N}$, $F_{z,\text{d36,exp}} = 0,36\text{ N}$ und $F_{z,\text{d54,exp}} = 0,54\text{ N}$

passives Balkensystem						
$F_{z,\text{d0,exp}}$	$F_{x,\text{exp}}$	27,5	28,5	29,5	30,5	–
	$P_{A,p}(F_{x,\text{exp}})$	0,001	0,006	0,699	0,999	–
$F_{z,\text{d15,exp}}$	$F_{x,\text{exp}}$	26,5	27,5	28,5	29,5	30,5
	$P_{A,p}(F_{x,\text{exp}})$	0,001	0,021	0,700	0,990	0,999
$F_{z,\text{d36,exp}}$	$F_{x,\text{exp}}$	25,5	26,5	27,5	–	–
	$P_{A,p}(F_{x,\text{exp}})$	0,001	0,186	0,999	–	–
$F_{z,\text{d54,exp}}$	$F_{x,\text{exp}}$	25,5	26,5	27,5	–	–
	$P_{A,p}(F_{x,\text{exp}})$	0,001	0,435	0,999	–	–
aktives Balkensystem						
$F_{z,\text{d0,exp}}$	$F_{x,\text{exp}}$	40,5	41,5	–	–	–
	$P_{A,a}(F_{x,\text{exp}})$	0,001	0,999	–	–	–
$F_{z,\text{d15,exp}}$	$F_{x,\text{exp}}$	32,5	33,5	34,5	35,5	–
	$P_{A,a}(F_{x,\text{exp}})$	0,001	0,574	0,961	0,999	–
$F_{z,\text{d36,exp}}$	$F_{x,\text{exp}}$	27,5	28,5	29,5	–	–
	$P_{A,a}(F_{x,\text{exp}})$	0,001	0,060	0,999	–	–
$F_{z,\text{d54,exp}}$	$F_{x,\text{exp}}$	27,5	28,5	–	–	–
	$P_{A,a}(F_{x,\text{exp}})$	0,001	0,999	–	–	–

Abbildung 7.4 oben stellt die Weibull-Verteilungsfunktionen P_W für die Axiallasten $F_{x,\text{un,exp}} = 23,5\text{ N}$ bis $F_{x,\text{ue,exp}} = 41,5\text{ N}$ für alle untersuchten Störkräfte $F_{z,\text{d0,exp}}$, $F_{z,\text{d15,exp}}$, $F_{z,\text{d36,exp}}$ und $F_{z,\text{d54,exp}}$ des passiven und des aktiven Balkensystems mit Vorauslenkung $q_{v,\text{exp}}$ dar, wie im Versuchsplan in Tabelle 6.11 aufgeführt.

Abbildung 7.4 unten zeigt die Belastbarkeit anhand der Dichtefunktionen $p_W(F_{x,\text{exp}}) = dP_W(F_{x,\text{exp}})/dF_{x,\text{exp}}$ der Weibullverteilungen am experimentellen passiven und aktiven Balkensystem.

Balkensystem ohne Störkraft $F_{z,\text{d0,exp}}$

Ohne laterale Störkraft $F_{z,\text{d0,exp}} = 0\text{ N}$ erreicht das aktive Balkensystem eine Erhöhung der ertragbaren Axiallast $F_{x,\text{W,a0}} = 41,3\text{ N}$ um ca. **40%** im Vergleich zu $F_{x,\text{W,p0}} = 29,8\text{ N}$ des passiven Balkensystems. Bei gleicher Axiallast $F_{x,\text{exp}}$ ist die Ausfallwahrscheinlichkeit des aktiven Systems stets kleiner als die Ausfallwahrscheinlichkeit des passiven Balkensystems.

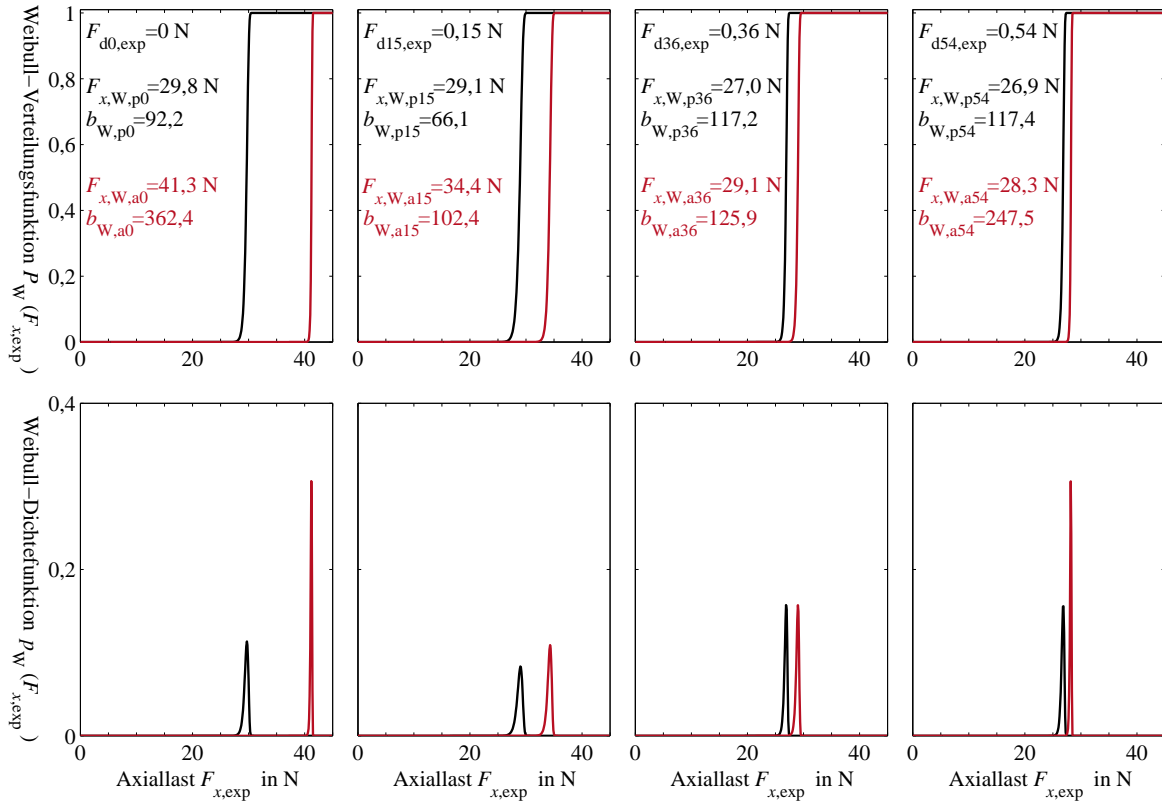


Abbildung 7.4: oben Weibull-Verteilungsfunktion $P_W(F_{x,exp})$, unten Weibull-Dichtefunktion $p_W(F_{x,exp})$ der Belastbarkeit durch die Axiallast $F_{x,exp}$ des passiven und aktiven experimentellen Balkensystems für $F_{z,d,exp}$, $F_{z,d15,exp}$, $F_{z,d36,exp}$ und $F_{z,d54,exp}$ gemäß Tabelle 6.11

Der Formparameter $b_{W,a0} = 362,4$ ist für das aktive Balkensystem um den Faktor 3,9 höher im Vergleich zu $b_{W,p0} = 92,2$ für das passive Balkensystem und bedeutet eine kleinere Streuung der ertragbaren Axiallast am aktiven Balkensystems, d. h. es herrscht geringere Unsicherheit.

Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d15,exp}$

Mit lateraler Störkraft $F_{z,d15,exp} = 0,15\text{ N}$ beträgt die Erhöhung der ertragbaren Axiallast $F_{x,W,a15} = 34,4\text{ N}$ des aktiven Balkensystems ca. **18%** im Vergleich zu $F_{x,W,p15} = 29,1\text{ N}$ des passiven Balkensystems. Bei gleicher Axiallast $F_{x,exp}$ ist die Ausfallwahrscheinlichkeit des aktiven Systems stets kleiner als die Ausfallwahrscheinlichkeit des passiven Balkensystems. Der Formparameter $b_{W,a15} = 102,4$ ist um den Faktor 1,55 größer als $b_{W,p15} = 66,1$. D. h. trotz der hohen Streuung der Störkraft $F_{z,d15,exp}$ ist die Unsicherheit im aktiven Balkensystem geringer als im passiven Balkensystem.

Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d36,exp}$

Mit der lateralen Störkraft $F_{z,d36,exp} = 0,36\text{ N}$ beträgt die Erhöhung der ertragbaren Axiallast $F_{x,W,a36} = 29,1\text{ N}$ des aktiven Balkensystems ca. **8%** im Vergleich zu $F_{x,W,p36} = 27,0\text{ N}$ des passiven Balkensystems. Bei gleicher Axiallast $F_{x,exp}$ ist die Ausfallwahrscheinlichkeit des aktiven Systems stets kleiner als die Ausfallwahrscheinlichkeit des passiven Balkensystems. Der Formparameter $b_{W,a36} = 125,9$ ist um den Faktor 1,08 größer als $b_{W,p36} = 117,2$. D. h. trotz der hohen Streuung der Störkraft $F_{z,d15,exp}$ ist die Unsicherheit im aktiven Balkensystem geringer als im passiven Balkensystem.

Balkensystem mit Störkraft $F_{z,d54,exp}$

Mit der lateralen Störkraft $F_{z,d54,exp} = 0,54\text{ N}$ beträgt die Erhöhung der ertragbaren Axiallast $F_{x,W,a54} = 28,3\text{ N}$ des aktiven Balkensystems ca. **5%** im Vergleich zu $F_{x,W,p54} = 26,9\text{ N}$ des passiven Balkensystems. Bei gleicher Axiallast $F_{x,exp}$ ist die Ausfallwahrscheinlichkeit des aktiven Systems stets kleiner als die Ausfallwahrscheinlichkeit des passiven Balkensystems. Der Formparameter $b_{W,a54} = 247,5$ ist um den Faktor 2,1 größer als $b_{W,p54} = 117,4$ und bedeutet wiederum geringere Unsicherheit des aktiven Balkensystems.

7.5 Fazit zur Bewertung von Unsicherheit in der aktiven Stabilisierung

Dieses Kapitel zeigt die Bewertung von Unsicherheit anhand der Ausfallwahrscheinlichkeiten des passiven und aktiven Balkensystems für die in Kapitel 6 definierten Lastfälle.

Zur Bewertung von Unsicherheit wird die Ausfallwahrscheinlichkeit mittels Weibullverteilungen berechnet, anhand derer ein Vergleich zwischen dem aktiven und passiven Balkensystem zur Stabilisierung gegen Knicken möglich ist. Der Lageparameter $F_{x,W}$ der Weibullverteilung beschreibt die technologische axial ertragbare charakteristische Last am passiven und aktiven Balkensystem und fasst damit die technisch für die Auslegung eines Bauteils erforderliche **Belastbarkeit** in einem Kennwert zusammen.

Der Formparameter b_W bewertet die Streuung der ertragbaren Last in der Stabilisierungstechnologie, d. h. in der axial ertragbaren Last und ist ein Maß für **Unsicherheit**. Damit fasst der Formparameter Unsicherheit in einem Kennwert zusammen. Unsicherheit ist im aktiven Balkensystem für alle Lastfälle um den Faktor 3,9 bis 1,08 kleiner als im passiven System, Streuungen in der ertragbaren Axiallast werden also stets durch die aktive Stabilisierung reduziert. Streuungen in der wirkenden Störkraft wirken sich direkt auf die Streuungen in der ertragbaren Axiallast aus, d. h. größere Streuung der wirkenden Störkraft führt zu größeren Streuungen der ertragbaren Axiallast. Es ist die Tendenz erkennbar, dass mit zunehmender Störkraft sowohl das passive als auch das aktive Balkensystem mit abnehmender Streuung in der ertragbaren Axiallast $F_{x,W}$ ausknicken, d. h. die Dichtefunktionen schmaler werden. Diese Tendenz korreliert mit der relativen Abweichung der Höhe der Störkraft aus der experimentellen Untersuchung der Störkraft, vgl. Tabelle 6.2.

In Abbildung 7.2 unten wird die Darstellung aus Abbildung 1.1 vom Beginn der vorliegenden Arbeit bestätigt, in der Erwartungswerte und Streuungen der Belastung und Belastbarkeit $F_{x,ue,a,exp}$ gezeigt sind. Die Belastbarkeit des aktiven Balkensystems in Form der ertragbaren Axiallast kann nun mit zugehöriger Unsicherheit angegeben und für die Dimensionierung verwendet werden.

Für eine bessere Auflösung der Ergebnisse der Ausfallwahrscheinlichkeit des aktiven Balkensystems werden kleinere Lastschritte der axialen Last $F_{x,exp}$, empfohlen, da das aktive Balkensystem stets in einem diskreten Lastschritt ausknickt. Mit der in dieser Arbeit verwendeten Schrittweite von $\Delta F_{x,exp} = 1 \text{ N}$ wird eine konservativere Aussage beim aktiven Balkensystem im Vergleich zum passiven Balkensystem gemacht.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit stellt zum einen eine neuartige **Technologie zur aktiven Stabilisierung** eines axial belasteten Balkensystems mit asymmetrischen Lagerungsbedingungen gegen Knicken vor, die sowohl numerisch als auch experimentell erprobt wird. Zum anderen wird eine Methode zur **Bewertung der Unsicherheit** in der Stabilisierungstechnologie auf die Problemstellung übertragen und angewendet, die den Vergleich von Unsicherheit im passiven und aktiven Balkensystem ermöglicht.

In der experimentellen Erprobung wurden das passive und aktive vorausgelenkte Balkensystem unter Wirkung unterkritischer, der kritischen und überkritischer Axiallasten sowie mehrerer Störkräfte untersucht. Es wurde gezeigt, dass das aktiv geregelte vorausgelenkte Balkensystem experimentell ca. 40% **höhere Axiallasten** ertragen kann als das passive Balkensystem; bei gleichzeitig geringerer Streuung in der ertragbaren Axiallast, d. h. geringerer Unsicherheit. Bei Wirkung ansteigender definierter Störkräfte kann das aktive Balkensystem noch 18%, 8% bzw. 5% höhere Axiallasten ertragen als das passive Balkensystem, ebenso bei gleichzeitig geringerer Unsicherheit in der ertragbaren Axiallast.

Darüber hinaus konnten aus einer großen Anzahl an Stichprobenversuchen Informationen zur Wirksamkeit und Unsicherheit in der Stabilisierungstechnologie selbst für das passive und das aktive Balkensystem gewonnen werden.

Zur **Bewertung von Unsicherheit** wird die Ausfallwahrscheinlichkeit mittels Weibullverteilungen berechnet, anhand derer ein Vergleich zwischen dem aktiven und passiven Balkensystem zur Stabilisierung gegen Knicken möglich ist. Mittels Weibullverteilungen wird die Ausfallwahrscheinlichkeit für alle untersuchten Axiallasten mit zwei Parametern beschrieben. Der Lageparameter der Weibullverteilung beschreibt die technologische axial ertragbare Last am passiven und aktiven Balkensystem und fasst damit die technisch für die Auslegung eines Bauteils erforderliche Belastbarkeit in einem Wert zusammen. Der Formparameter bewertet die Streuung der axial ertragbaren Last und ist ein Maß für Unsicherheit in der Stabilisierungstechnologie. Damit fasst der Formparameter Unsicherheit basierend auf Ausfallwahrscheinlichkeiten in einem Kennwert zusammen. Unsicherheit ist im aktiven Balkensystem für alle Lastfälle um den Faktor 3,9 bis 1,08 kleiner als im passiven System, d. h. durch die aktive Stabilisierung wird **Unsicherheit reduziert**.

Streuungen in der wirkenden Störkraft wirken sich direkt auf die Streuungen in der ertragbaren Axiallast aus, d. h. größere Streuung der wirkenden Störkraft führt zu größeren Streuungen der ertragbaren Axiallast.

Der in der vorliegenden Arbeit verfolgte Ansatz der aktiven Stabilisierung eines schlanken, fest-gelenkig gelagerten Balkens mit Rechteckquerschnitt gegen Knicken in einer Ebene basiert auf der geregelten Einleitung lateraler aktiver Kräfte in der Nähe der Balkenlagerung. Dadurch kann Knicken aktiv verhindert werden ohne die strukturdynamischen Eigenschaften des passiven Balkensystems durch Applizieren von Aktuatoren zu beeinflussen.

Für die numerische Simulation und Auslegung der Regelung wurde ein numerisches Zustandsraummodell des aktiven Balkensystems hergeleitet und mit den experimentell ermittelten modalen Größen verifiziert. Für das angepasste numerische Modell des aktiven Balkensystems wurde eine modale Zustandsrückführung erfolgreich implementiert. Da sich das Systemverhalten des Balkensystems mit der Axiallast jedoch signifikant ändert, wurden mehrere Regler für Bereiche von Axiallasten im Vorhinein ausgelegt und im Betrieb passend zur wirkenden Axiallast mittels gesteuerter Adaption manuell geschaltet. Für die Auslegung der stabilisierenden Regler wurde eine LQ-Regelung verwendet.

Das strukturdynamische Verhalten des Balkensystems wurde mit den Lastfällen aus den experimentellen Untersuchungen numerisch simuliert und als Zeitverlauf der modalen Auslenkung sowie als Phasenportrait der modalen Geschwindigkeit über der modalen Auslenkung dargestellt. Das vorausgelenkte, aktiv stabilisierte Balkensystem kann ohne Störkraft numerisch ca. 50% höhere Axiallasten ertragen als das passive Balkensystem. Bei Wirkung der höchsten untersuchten Störkraft kann das vorausgelenkte aktive Balkensystem die Axiallast numerisch nur noch um ca. 20% erhöhen.

Die Verwendung der Stabilisierungstechnologie bei unsicherer axialer Belastung sowie die Bewertung der Unsicherheit in der Stabilisierungstechnologie selbst und Reduzierung der Unsicherheit in Betrieb bzw. Nutzung des aktiven Balkensystems wird im Sonderforschungsbereich SFB 805 zusammenfassend als **Beherrschung von Unsicherheit** bezeichnet.

Als **Ausblick** ist es hinsichtlich einer späteren Anwendung erstrebenswert, die Technologie der aktiven Stabilisierung weiterzuentwickeln. Es wird empfohlen, die Technologie der aktiven Stabilisierung von Balken mit Rechteckquerschnitt auf **Balken mit Rundquerschnitt** zu übertragen, die in unendlich vielen Ebenen statt nur in einer Ebene knicken können und mit anderen lasttragenden Bauteilen z. B. in einem Tragwerk in Wechselwirkung stehen.

Darüber hinaus scheint es sinnvoll, das Belastungsszenario aus der vorliegenden Arbeit mit zeitabhängigen Störkräften und quasistatischen Axiallasten um zeitabhängige, z. B. **harmonische oder stoßartige Axiallasten** zu erweitern. Dafür ist es notwendig, die Axiallast stufenlos aufbringen zu können, beispielsweise mittels eines Tauchspulenaktuators oder eines definierten Fallversuchs. Für die aktive Stabilisierung ist dann ebenfalls eine stufenlose Anpassung der Regelung vorzunehmen, um hinreichend schnell auf die Änderungen in der Axiallast zu reagieren.

Eine **Strukturintegration** der Aktuatoren erfolgt ansatzweise bereits in den Arbeiten mit piezoelektrischen Flächenwandlern aus dem Stand der Forschung, die jedoch in keiner der Arbeiten in den Balken integriert werden, sondern stets auf die Oberfläche aufgeklebt werden. Bei dem in der vorliegenden Arbeit verfolgten Konzept der aktiven Krafteinleitung nahe der Einspannung des Balkens ist eine Integration der Aktuatoren in die Lagerung möglich. Damit kann ein kleinerer Bauraum als bisher erzielt werden, der die Verwendung der Technologie begünstigt. Weiterhin kann in Zukunft auch die Regelung statt auf einem dSPACE-Regelungssystem auf einem Microcontroller implementiert werden, um die Integrationstiefe weiter zu steigern.

Die Implementierung einer **semi-aktiven Stabilisierung** gegen Knicken erscheint wenig aussichtsreich. Eine Analyse der potentiellen Energie des axial belasteten Balkens besagt, dass sie ein lokales Maximum bei der Nulllage des überkritisch axial belasteten Balkens besitzt, Anhang A.3. Mit zunehmender Auslenkung nimmt die potentielle Energie für kleine Auslenkungen ab. Bei Reibung im realen System muss immer Energie in das Balkensystem eingebracht werden, um es wieder in die gerade Nulllage zu bringen und in dieser zu halten. Eine rein dissipative semi-aktive Lösung, in der nur Hilfsenergie aber keine Stellenergie in das System eingebracht wird ist folglich nicht geeignet, um das Balkensystem zu stabilisieren.

Für das Ziel der **Beherrschung von Unsicherheit** gemäß SFB 805 ist begleitend zu jedem technologischen Entwicklungsschritt eine Unsicherheitsbewertung durchzuführen.

A Anhang

A.1 Kenndaten der verwendeten Sensoren und Aktuatoren

Tabelle A.1: DMS-Kraftmessdose ⑩

Bezeichnung	<i>ME KM 26z-100N</i>
Empfindlichkeit	1 mV/V
Speisespannung U_B	5 V
Brückenwiderstand	350 Ohm
Messbereich	0 – 100 N

Tabelle A.2: Resistive Dehnungsmessstreifen ⑪

Bezeichnung	<i>HBM 1-LY13-06-120</i>
k -Faktor	$1,76 \pm 1,5\%$
Wärmedehnung für Aluminium	$\alpha = 23 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$
DMS-Widerstand	120 Ohm
Speisespannung U_B	1,5 V
Gitterlänge	0,6 mm

Tabelle A.3: Quartz-Kraftmessunterlagscheibe ⑮

Bezeichnung	<i>Kistler 9001A</i>
Empfindlichkeit	$-4,3 \text{ pC/N}$
Messbereich	0 – 7,5 kN
Auflösung	$< 0,01 \text{ N}$

Tabelle A.4: Piezo-Stapelaktuatoren ⑫

Bezeichnung	<i>PiezoMechanik PSt 150/10/160 VS15</i>
max. Betriebsspannung U_{\max}	150 V
max. freier Stellweg Δl_{\max}	160 μm
Blockierkraft $F_{a,\max}$	3500 N

A.2 Kenndaten der verwendeten Mess- und Regelgeräte

Tabelle A.5: DMS-Trägerfrequenzmessverstärker (G1)

Bezeichnung	<i>PEEKEL Picas LCD-4F</i>
Anzahl Kanäle	4
Auflösung der Kanäle	16 bit
Trägerfrequenz	5 kHz
Brückenspeisespannung U_B	0,5 – 5 V

Tabelle A.6: Analoge Filter (G2)

Bezeichnung	<i>KEMO BenchMaster 21M, Filter Response 37</i>
Filtertyp, -ordnung	elliptischer Filter, 6. Ordnung
Flankensteilheit	–52 dB/Dekade
Eckfrequenz f_e	0,1 – 9800 Hz

Tabelle A.7: dSPACE-Regelungssystem (G3)

Bezeichnung	<i>dSPACE ACE1103</i>
Taktfrequenz Prozessor	1000 MHz
Anzahl analoger Kanäle	20 Eingänge, 8 Ausgänge
Auflösung der Kanäle	16 bit

Tabelle A.8: Piezo-Verstärker (G4)

Bezeichnung	<i>PiezoMechanik LE-100/200-100</i>
Ausgangsspannung	0 – 200V
Verstärkung	20-fach, 40-fach
max. Ausgangsstrom	1000 mA
mittlerer Ausgangsstrom	300 mA

A.3 Potentielle Energie des axial belasteten Balkens

Bei einer definierten überkritischen Axiallast ergeben sich im Verzweigungsdiagramm zwei stabile Gleichgewichtslagen (●) sowie eine instabile Gleichgewichtslage (○), Abbildung A.1b. Bei den stabilen Gleichgewichtslagen befindet sich jeweils ein Minimum der potentiellen Energie V (---). Bei der instabilen Gleichgewichtslage befindet sich ein Maximum der potentiellen Energie des axial belasteten Balkens, Abbildung A.1b. Da der Balken stets zu einem niedrigeren Energieniveau strebt, stellt sich bei einer definierten Axiallast eine ausgelenkte Ruhelage (●) ein.

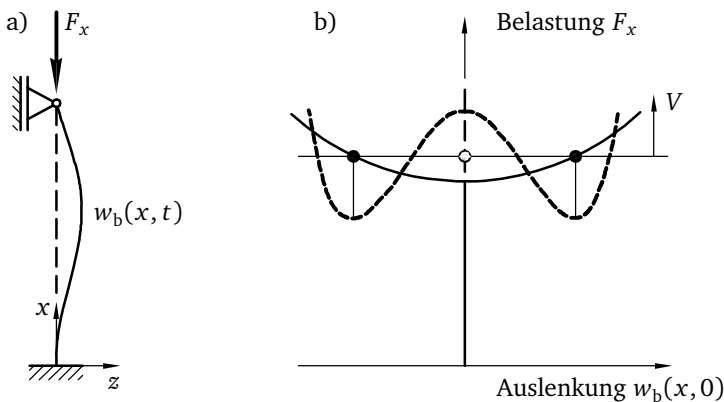


Abbildung A.1: a) Axial belasteter Balken, ideal gerade ($---$), ausgelenkt in erster Knickeigenform $w_b(x, t)$ in z -Richtung ($—$), b) Verzweigungsdiagramm mit stabilen Gleichgewichtslagen ($—$) und instabiler Gleichgewichtslage ($---$) bei einer überkritischen Axiallast und Verlauf der potentiellen Energie V ($---$), vgl. [55]

Wenn der Balken aus seiner geraden instabilen Ruhelage beginnt auszuknicken, sinkt das Energieniveau und die aktive Stabilisierungstechnologie hat die Aufgabe, soviel Energie in das System einzubringen, dass der Balken wieder in seine instabile Ruhelage gebracht wird. Da das reale Balkensystem reibungsbehaftet ist, muss zur aktiven Stabilisierung stets Energie zugeführt werden.

Im Hinblick auf eine semi-aktive Stabilisierung des Balkensystems ohne extern zugeführte Energie könnte Energie aus der Knickbewegung rekuperiert werden. Auch wenn die gesamte rekuperierte Bewegungsenergie zur Stabilisierung eingesetzt werden könnte, würde sie aufgrund der Reibung nicht ausreichen, um den Balken in die vollständig gerade instabile Ruhelage zu versetzen.

Literaturverzeichnis

- [1] Adamy, J.: *Systemdynamik und Regelungstechnik II*, Shaker Verlag, Aachen, 2007.
- [2] Agrawal, B.N.; Treanor, K.E.: Shape control of a beam using piezoelectric actuators, *Smart Materials and Structures*, 8(6):729–740, 1999.
- [3] Beitz, W.; Grote, K.H. (Herausgeber): *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [4] Berlin, A.A.: *Towards Intelligent Structures: Active Control of Buckling*, Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA/USA, 1994.
- [5] Berlin, A.A.: Active Control of Buckling using Piezo-Ceramic Actuators, *Smart Structures and Materials 1995: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, Band 2447, S. 141–154, San Diego, CA/USA, 1995.
- [6] Berlin, A.A.; Chase, J.G.; Yim, M.; Maclean, B.J.; Olivier, M.; Jacobsen, S.C.: MEMS-Based Control of Structural Dynamic Instability, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* [58], S. 574–586, 1998.
- [7] Bertsche, B.; Lechner, G.: *Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, 3. Auflage.
- [8] Bolotin, V.V.: *Statistical methods in structural mechanics*, Holden-Day, San Francisco, CA/USA, San Francisco, CA/USA, 1969.
- [9] Büter, A.; Hanselka, H.: Structural Health Monitoring (SHM) - Konzepte zur Lebensdauerverlängerung und Gewichtsreduktion, *Materials Testing*, 53:709–714, 2011.
- [10] Chase, J.G.; Yim, M.: Optimal Stabilization of Column Buckling, *Journal of Engineering Mechanics*, 125(9):987–993, 1999.
- [11] Choi, S.; Lee, J.J.; Seo, D.C.; Choi, S.W.: The active buckling control of laminated composite beams with embedded shape memory alloy wires, *Composite Structures*, 47:679–686, 1999.
- [12] Cohen, N.: *Active control of buckling: centralized and decentralized approaches*, Diplomarbeit, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA/USA, 1996.

-
- [13] DIN ISO 2768-2: Allgemeintoleranzen: Toleranzen für Längen- und Winkelmaße ohne einzelne Toleranzeintragung, Beuth Verlag, Berlin, 1991.
- [14] Elishakoff, I.: Uncertain buckling: its past, present and future, *International Journal of Solids and Structures*, 37(46-47):6869–6889, 2000.
- [15] Engelhardt, R.A.; Koenen, J.F.; Enss, G.C.; Sichau, A.; Platz, R.; Klobardanz, H.; Birkhofer, H.; Hanselka, H.: A Model to Categorise Uncertainty in Load-Carrying Systems, *MMEP2010 1st International Conference on Modelling and Management of Engineering Processes*, S. 53–64, Cambridge/UK, 2010.
- [16] Enss, G.C.: *Regelung der Stabilität einer adaptiven lasttragenden Struktur*, Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt, 2009.
- [17] Enss, G.C.; Platz, R.: Statistical Approach for Active Buckling Control With Uncertainty, J. De Clerck (Herausgeber), *Topics in Modal Analysis I, Volume 7: Proceedings of the 32nd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics*, Orlando, FL/USA, S. 291–297, Springer International Publishing, 2014.
- [18] Enss, G.C.; Platz, R.; Hanselka, H.: An Approach to Control the Stability in an Active Load-Carrying Beam-Column by One Single Piezoelectric Stack Actuator, *ISMA 2010 - 24th International Conference on Noise and Vibration Engineering*, S. 535–546, Leuven/BE, 2010.
- [19] Enss, G.C.; Platz, R.; Hanselka, H.: A survey on uncertainty in the control of an active column critical to buckling, *ICEDyn 2011 - International Conference on Structural Engineering Dynamics*, Tavira/PT, 2011.
- [20] Enss, G.C.; Platz, R.; Hanselka, H.: Mathematical modelling of postbuckling in a slender beam column for active stabilisation control with respect to uncertainty, *Proc. SPIE 8341*, S. 834119, San Diego, CA/USA, 2012.
- [21] Enss, G.C.; Platz, R.; Hanselka, H.: Uncertainty in loading and control of an active column critical to buckling, *Shock and Vibration*, 19(5):929–937, 2012.
- [22] Enss, G.C.; Platz, R.; Melz, T.: Evaluation of uncertainty in experimental active buckling control of a slender beam-column using Weibull analysis, *Proceedings of ICEDyn 2015 - International Conference on Engineering Dynamics*, Lagos/PT, 2015.
- [23] Euler, L.: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne et Geneve, 1744.
- [24] Franco Correia, V.M.; Mota Soares, C.M.; Mota Soares, C.A.: Buckling optimization of composite laminated adaptive structures, *Composite Structures*, 62:315–321, 2003.

-
- [25] Götz, B.; Platz, R.; Melz, T.: Consistent Approach to describe and evaluate uncertainty in vibration attenuation using resonant piezoelectric shunting and tuned mass dampers, *Proceedings of the 2nd International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling Uncertainties 2014*, S. 51–64, INSA-Rouen, Rouen/France, 2014.
- [26] Gross, D.; Hauger, W.; Schröder, J.; Wall, W.A.: *Technische Mechanik Band 2: Elastostatik*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [27] Haibach, E.: *Betriebsfestigkeit - Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [28] Han, H.P.; Ang, K.K.; Wang, Q.; Taheri, F.: Buckling enhancement of epoxy columns using embedded shape memory alloy spring actuators, *Composite Structures*, 72:200–211, 2006.
- [29] Hanselka, H.; Breitbach, E.; Bein, T.; Krajenski, V.: *Grundwissen des Ingenieurs, Kapitel Mechatronik / Adaptronik*, Fachbuchverlag Leipzig, 2007.
- [30] Herold, S.: *Simulation des dynamischen und akustischen Verhaltens aktiver Systeme im Zeitbereich*, Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2003.
- [31] Hoffmann, K.: *Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmessstreifen*, Hottinger-Baldwin-Messtechnik-GmbH, 1987.
- [32] Janocha, H. (Herausgeber): *Adaptronics and Smart Structures*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [33] Janssen, J.; Laatz, W.: *Statistische Datenanalyse mit SPSS für Windows*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007, 6. Auflage.
- [34] Jefferis, R.P.: *Feedback Control of the Buckling Instability in an Axially Compressed Thin Elastic Beam*, Dissertation, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA/USA, Dept. of Electrical Engineering, 1968.
- [35] Jiju: *Design of Experiments for Engineers and Scientists*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2003.
- [36] Juang, J.N.; Phan, M.: *Identification and control of mechanical systems*, Cambridge University Press, New York, 2001.
- [37] KEMO Ltd.: Datenblatt zu analogem Filter Benchmaster21M – 6 Pole Elliptic Filter, Response 37, 2010.
- [38] Koiter, W.T.: *Over de stabiliteit van het elastische evenwicht*, Dissertation, Technische Hochschule Delft, Delft/NL, (Übersetzung: On the Stability of Elastic Equilibrium, NASA AFFDL-TR-70-25, 1970), 1945.

-
- [39] Lesieutre, G.A.; Davis, C.L.: Can a Coupling Coefficient of a Piezoelectric Device be Higher Than Those of Its Active Material?, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 8:859–867, 1997.
- [40] Lunze, J.: *Regelungstechnik 2 Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*, 978-3-540-78463-0, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [41] Markert, R.: *Strukturdynamik*, Shaker Verlag, Aachen, 2013.
- [42] Meressi, T.; Paden, B.: Buckling control of a flexible beam using piezoelectric actuators, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(5):977–980, 1993.
- [43] Mukherjee, A.; Saha Chaudhuri, A.: Active control of dynamic instability of piezolaminated imperfect columns, *Smart Materials and Structures*, 11(6):874–879, 2002.
- [44] Ondoua, S.: *Unsicherheit in der Bewertung von Struktur-Eigenschaftsbeziehungen zwischen aktiven und passiven Systemelementen in aktiven lasttragenden Systemen*, Dissertation, Technische Universität Darmstadt, noch unveröffentlicht.
- [45] Ondoua, S.; Platz, R.: Numerical and experimental investigation of parameter uncertainty in the working diagram and in use of a single piezoelectric stack actuator to stabilize a slender beam column against buckling, A. Cunha; E. Caetano; P. Ribeiro; G. Müller (Herausgeber), *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2014*, 2713-2719, Porto/Portugal, 2014.
- [46] Platz, R.; Enss, G.C.; Ondoua, S.; Melz, T.: Active stabilization of a slender beam-column under static axial loading and estimated uncertainty in actuator properties, *Proceedings of the Second International Conference on Vulnerability and Risk Analysis and Management (ICVRAM) and the Sixth International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis (ISUMA)*, S. 235–244, Liverpool/UK, 2014.
- [47] Preumont, A.: *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*, Springer Verlag, Dordrecht/NL, 2006.
- [48] Schaeffner, M.; Enss, G.C.; Platz, R.: Mathematical modeling and numerical simulation of an actively stabilized beam-column with circular cross-section, *Proc. SPIE Vol. 9057*, S. 90572H, San Diego, CA/USA, 2014.
- [49] Skogestad, S.; Postlethwaite, I.: *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, New York/USA, 2005.

-
- [50] Thompson, S.P.; Loughlan, J.: The active buckling control of some composite column strips using piezoceramic actuators, *Composite Structures*, 32:59–67, 1995.
- [51] Timoshenko, S.; Gere, J.: *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, Singapore, 1963.
- [52] Unbehauen, H.: *Regelungstechnik III: Identifikation, Adaption, Optimierung*, Vieweg Braunschweig Wiesbaden, 1988, 3. Aufl. Auflage.
- [53] Varelis, D.; Saravanos, D.A.: Coupled buckling and postbuckling analysis of active laminated piezoelectric composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, 41:1519–1538, 2004.
- [54] VDI 2064:2010: *Aktive Schwingungsisolierung*, Beuth Verlag, Berlin, 2010.
- [55] Virgin, L.N.: *Vibration of Axially Loaded Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, MA/USA, 2007.
- [56] Vos, R.; Barrett, R.: Post-Buckled Precompressed Techniques in Adaptive Aerostructures: An Overview, *Journal of Mechanical Design*, 132:031004, 2010.
- [57] Wang, Q.S.: Active buckling control of beams using piezoelectric actuators and strain gauge sensors, *Smart Materials and Structures*, 19(6):65022, 2010.
- [58] Wang, Q.; Wu, N.: A review on structural enhancement and repair using piezoelectric materials and shape memory alloys, *Smart Materials and Structures*, 21(1):013001, 2012.
- [59] Wiedemann, J.: *Leichtbau: Elemente und Konstruktion*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [60] Yuan, F.G.: Enhancement of Buckling Load with the Use of Active Materials, *Technischer Bericht*, NASA Langley Research Center, Hampton, VA/USA, 2002.
- [61] Zenz, G.; Zehetner, C.; Gerstmayr, J.; Humer, A.: Enhancement of the Stability of Beams with Piezoelectric Transducers, R. Scheidl; B. Jakoby (Herausgeber), *13th Mechatronics Forum International Conference*, Band 2, S. 445–451, Linz/AT, 2012.

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen

DMS	Dehnmessstreifen
FGL	Formgedächtnislegierungen
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
LQR	Linear-Quadratischer Regler
MEMS	Micro-Electro-Mechanical System
PBP	Post-Buckled Precompressed Elements
PID	Regler mit Proportional-, Integral- und Differentialanteil
SFB	Sonderforschungsbereich
ZRD	Zustandsraumdarstellung

Lateinische Symbole

$A(F_x)$	Systemmatrix in der ZRD, mehrere Einheiten
A	Querschnittsfläche eines Balkens in m^2
$B(F_x)$	Eingangsmatrix in der ZRD, mehrere Einheiten
b	Balkenbreite in m
b_W	Formparameter der Weibullverteilung
$C(F_x)$	Ausgangsmatrix der Dehnung in der ZRD, mehrere Einheiten
$\tilde{C}(F_x)$	reduzierte Ausgangsmatrix der Dehnung in der ZRD in 1/m
c	Knickfaktor zur Berechnung der eff. Knicklänge, dimensionslos
D	Durchgangsmatrix in der ZRD, mehrere Einheiten
E	Elastizitätsmodul in N/m^2
$err(\omega_n)$	relative Abweichung zwischen numerisch und experimentell ermittelter Eigenkreisfrequenz in %
F_x	axiale Belastung eines Balkens in N
$F_{x,cr}$	kritische axiale Knicklast eines Balkens in N
$F_{x,cr,a}$	aktiv ertragbare axiale Drucklast eines Balkens in N
$F_{x,W}$	Lageparameter der Weibullverteilung
$F_{z,a}(t)$	aktiv stabilisierende, laterale Kraft in N
$F_{z,d}(t)$	laterale Störkraft in N
$\hat{F}_{z,d}$	Maximalwert der lateralen Störkraft in N

f_{exp}	Faktor der experimentellen Erhöhung der ertragbaren Last, dimensionslos
f_{num}	Faktor der numerischen Erhöhung der ertragbaren Last, dimensionslos
h	Balkendicke in m
I_y	Flächenträgheitsmoment bzgl. der y -Achse in m^4
I	Einheitsmatrix, dimensionslos
J	Gütefunktional des LQR, dimensionslos
$K(F_x)$	Reglermatrix für Zustandsrückführung, mehrere Einheiten
k_1, k_3	Parameter des Schwingungs-Eigenwertproblems in $1/\text{m}$
k_{DMS}	k -Faktor eines Dehnungsmessstreifens, dimensionslos
l	Balkenlänge in m
l_{eff}	effektive Knicklänge eines Balkens in m
m	Anzahl zu vergleichender streuender Werte, dimensionslos
$P_{A,p}$	Ausfallwahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeit des Knickens
$P_W(F_x)$	Weibull-Verteilungsfunktion
$p(F_x)$	Dichtefunktion
$p_W(F_x)$	Weibull-Dichtefunktion
Q	Gewichtungsmatrix der Regelgrößen des LQR in $1/\text{m}^2$
$q(t)$	Zustandsvektor in der ZRD, mehrere Einheiten
$q_n(t)$	n -te modale Auslenkung eines Balkens in m
$\dot{q}_n(t)$	n -te modale Geschwindigkeit eines Balkens in m/s
q_v	modale Vorauslenkung eines Balkens in m
R	Gewichtungsfaktor der Eingangsgrößen des LQR in $1/\text{N}^2$
$r(t)$	Zeitfunktion in s
S	Sicherheitsabstand, dimensionslos
ΔS	zusätzlicher Sicherheitsabstand, dimensionslos
s	Schlankheitsgrad eines Balkens, dimensionslos
s_{grenz}	Grenzschlankheitsgrad eines Balkens, dimensionslos
T_A	Abtastzeit in s
T_d	Stoßdauer der Störkraft in s
t	Zeit in s
t_a	Abklingzeit in s
t_b	Ausknickzeit in s
t_{end}	Dauer eines Gleitsinussignals in s
$U_a(t)$	Regelungssignal auf Aktuatoren für aktive Stabilisierung in V
U_B	Speisespannung der WHEATSTONESchen Brückenschaltung in V
$U_{\text{Ident}}(t)$	Testsignal auf Aktuatoren für Identifikation in V

$u(t)$	Eingangsvektor in der ZRD in N
V	potentielle Energie des axial belasteten Balkens in Nm
$W(x)$	örtliche Lösung der Balkenauslenkung in m
$w(x, t)$	laterale Auslenkung eines Balkens in m
$w_b(x)$	laterale Auslenkung eines Balkens infolge Knicken in m
$w_d(x, t)$	laterale Auslenkung eines Balkens infolge lateraler Störkraft in m
$w_v(x)$	laterale Vorauslenkung eines Balkens in m
$y(t)$	Ausgangsvektor der Dehnung in der ZRD in m/m

Griechische Symbole

$\kappa_n(F_x)$	n -te Nullstelle bei Lösung des Schwingungsproblems in 1/m
Λ_n	n -ter Eigenwert des Knickeigenwertproblems in 1/m
$\lambda_{p,2n-1/2n}$	Eigenwertpaar zur n -ten Schwingungseigenform des passiven Balkensystems in der ZRD in 1/s
μ	Mittelwert einer Normalverteilung, Einheit der Prozessgröße
Ω_0	Startkreisfrequenz des Gleitsinus in 1/s
Ω_e	Erregerkreisfrequenz in 1/s
Ω_{end}	Endkreisfrequenz des Gleitsinus in 1/s
ω_A	Abtastkreisfrequenz in 1/s
ω_e	Eckkreisfrequenz des Tiefpassfilters in 1/s
$\omega_n(F_x)$	n -te Eigenkreisfrequenz eines Balkens in 1/s
ω_s	Signalkreisfrequenz in 1/s
$\Phi_n(x, F_x)$	n -te Schwingungseigenform eines Balkens, dimensionslos
$\Psi(x, F_x)$	Beobachtbarkeitsindex der Dehnung, dimensionslos
$\psi(F_x)$	Axiallastparameter in 1/m
ρ	Dichte eines Werkstoffs in kg/m ³
σ	Standardabweichung einer Normalverteilung, Einheit der Prozessgröße
θ_n	modale Dämpfung der n -ten Schwingungseigenform, dimensionslos

Indizes und mathematische Symbole

\varnothing_0	mit lateraler Störkraft $F_{z,d} = 0\text{ N}$ bzw. Axiallast $F_x = 0\text{ N}$
\varnothing_{15}	mit lateraler Störkraft $F_{z,d} = 0,15\text{ N}$
\varnothing_{36}	mit lateraler Störkraft $F_{z,d} = 0,36\text{ N}$
\varnothing_{54}	mit lateraler Störkraft $F_{z,d} = 0,54\text{ N}$
\varnothing_a	aktiv
\varnothing_b	Knicken (engl. buckling)
\varnothing_{cr}	kritisch (engl. critical)
\varnothing_d	Störung (engl. disturbance)

\square_{exp}	experimentell
\square_n	n -ter Schwingungseigenform zugeordnet
\square_{num}	numerisch
\square_p	passiv
\square_{ue}	überkritisch
\square_{un}	unterkritisch
$\square_{x,y,z}$	x -, y - bzw. z -Richtung
\square'	örtliche Ableitung
$\dot{\square}$	zeitliche Ableitung
i	imaginäre Zahl
$\Im\{\square\}$	Imaginärteil
$\Re\{\square\}$	Realteil

Abbildungsverzeichnis

1.1	a) Axial belasteter Balken, b) Häufigkeitsverteilung der Belastung und Belastbarkeit	2
2.1	a) Axial belasteter Balken, b) Kraft-Auslenkungs-Diagramm	6
2.2	Balken der Länge l mit fester Einspannung und gelenkiger Lagerung .	7
2.3	Skalierungsdiagramm der normierten Knicklast	8
3.1	a) Ideal gerader Balken, b) ideal gerader Balken mit Störkraft, c) Balken mit Vorauslenkung, d) vorausgelenktes und gestörtes, aktiv stabilisiertes Balkensystem mit aktiven Kräften	18
3.2	Modale Zerlegung der Auslenkung	19
3.3	Balken und Verzweigungsdiagramm mit stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen	20
4.1	Mechanisches Ersatzbild des aktiven Balkensystems	23
4.2	Bezogene Eigenkreisfrequenzen über bezogener Axiallast	29
4.3	Dimensionslose Auslenkung der Knickeigenform und Schwingungseigenformen	30
4.4	Dimensionslose Dehnung der Knickeigenform und Schwingungseigenformen	31
5.1	Eigenwerte in der komplexen Ebene für passives Balkensystem	37
5.2	Beobachtbarkeitsindex der ersten drei Schwingungseigenformen	39
5.3	Regelkreis des Zustandsraummodells mit Rückführung	42
5.4	Eigenwerte in der komplexen Ebene für passives und aktives Balkensystem	44
5.5	Regelkreis des Zustandsraummodells mit Rückführung und Tiefpassfilterung	46
5.6	Störkraft $F_{z,d,num}(t)$	50
5.7	Fall A1, numerische Zeitverläufe der ersten modalen Auslenkung	52
5.8	Fall A1, numerische Zeitverläufe der aktiven Kraft	53
5.9	Fall A1, numerische Phasenportraits	54
5.10	Fall A2, numerische Zeitverläufe und Phasenportraits	56
5.11	Fall A3, numerische Zeitverläufe und Phasenportraits	58
6.1	Versuchsstand aktives Balkensystem	62
6.2	Einleitung der Axiallast	64
6.3	a) Pendel mit Kraftmessunterlagscheibe, b) Zeitsignal der Störkraft	65
6.4	Regelkreis des Zustandsraummodells mit Signalkonditionierung	67

6.5	Piezo-Stapelaktuatoren	69
6.6	Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Eigenkreisfrequenzen	72
6.7	Fall B1, experimentelle Zeitverläufe und Phasenportraits	77
6.8	Fall B2, experimentelle Zeitverläufe und Phasenportraits	79
6.9	Fall B3, experimentelle Zeitverläufe und Phasenportraits	81
6.10	Modale Auslenkung über veränderte Axiallast mit Störkraft $F_{z,d0,exp}$. .	85
6.11	Modale Auslenkung über veränderte Axiallast mit Störkraft $F_{z,d15,exp}$. .	87
6.12	Modale Auslenkung über veränderte Axiallast mit Störkraft $F_{z,d36,exp}$. .	88
6.13	Modale Auslenkung über veränderte Axiallast mit Störkraft $F_{z,d54,exp}$. .	90
7.1	Ermittlung der Verteilungsfunktion anhand der exp. Versuchsdaten . .	93
7.2	Ausfallwahrscheinlichkeiten des passiven Balkensystems	94
7.3	a) Weibull-Verteilungsfunktion, b) Weibull-Dichtefunktion über Axiallast	96
7.4	Weibull-Verteilungsfunktion und Dichtefunktion für Balkensystem mit Störkräften	98
A.1	a) Axial belasteter Balken, b) Verzweigungsdiagramm und potentielle Energie, vgl. [55]	106

Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich passiver, semi-aktiver und aktiver Systeme, vgl. [54]	11
2.2	Gegenüberstellung Stabilisierungstechnologien	12
5.1	Untersuchte definierte Axiallasten	36
5.2	Erste vier Eigenkreisfrequenzen des axial belasteten Balkens	48
5.3	Bezeichnung der numerisch simulierten Lastfälle	50
5.4	Numerisch simulierte Fälle mit Vorauslenkung und Störkraft	51
5.5	Numerische Ergebnisse Fall A1	55
5.6	Numerische Ergebnisse Fall A2	57
5.7	Numerische Ergebnisse Fall A3	59
6.1	Komponenten des aktiven Balkensystems, vgl. Abbildungen 4.1 und 6.1	63
6.2	Gemittelte Spitzenwerte und Standardabweichung der Störkraft	65
6.3	Mess- und Regelgeräte des aktiven Balkensystems, s. Anhang A.2	67
6.4	Axiallastbereiche mit stabilisierenden Reglermatrizen, [17]	68
6.5	Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Eigenkreisfrequenzen sowie experimentell ermittelte modale Dämpfung	74
6.6	Bezeichnung der experimentell simulierten Lastfälle	75
6.7	Experimentell simulierte Fälle mit Vorauslenkung und Störkraft	76
6.8	Experimentelle Ergebnisse Fall B1	78
6.9	Experimentelle Ergebnisse Fall B2	80
6.10	Experimentelle Ergebnisse Fall B3	82
6.11	Versuchsanzahl für jeden Lastfall aus Axiallast und Störkraft	83
7.1	Ausfallwahrscheinlichkeiten des passiven Balkensystems	94
7.2	Wertepaare der Axiallasten und zugeh. Ausfallwahrscheinlichkeiten	97
A.1	DMS-Kraftmessdose	104
A.2	Resistive Dehnungsmessstreifen	104
A.3	Quartz-Kraftmessunterlagscheibe	104
A.4	Piezo-Stapelaktuatoren	104
A.5	DMS-Trägerfrequenzmessverstärker	105
A.6	Analoge Filter	105
A.7	dSPACE-Regelungssystem	105
A.8	Piezo-Verstärker	105

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM an der Technischen Universität Darmstadt und am Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG danke ich für die finanzielle Förderung meiner Arbeit im Rahmen des Sonderforschungsbereichs (SFB) 805 „Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus“.

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Tobias Melz, gilt mein herzlicher Dank für die Betreuung meiner Arbeit. Dem ehemaligen Leiter des Fachgebiets SzM und des Fraunhofer LBF, Herrn Prof. Holger Hanselka, danke ich dafür, durch Initiierung des SFB 805 den Rahmen meiner Arbeit gesetzt zu haben.

Herrn Prof. Wilfried Becker, Leiter des Fachgebiets Strukturmechanik FSM danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats und den fachlichen Austausch.

Besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Roland Platz für die intensiven fachlichen Gespräche, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben und seinen vertrauensvollen Rat.

Den Kollegen im SFB 805, am Fachgebiet SzM und am Fraunhofer LBF sowie meinen Studenten danke ich sehr herzlich für das angenehme Arbeitsumfeld, die vielen anregenden Gespräche und ihre tatkräftige Mitwirkung.

Meiner Familie und meinen Freunden danke ich für ihre Ermutigungen. Besonders danke ich meiner Frau Carolina für ihre bedingungslose Unterstützung und stete Aufmunterung.